Chapitre 1

LES INTÉRÊTS

1.1 Les intérêts simples

A RETENIR :

- Le **capital** est la somme placée ou prêtée.
- Le **taux** (par défaut, annuel) est le quotient de l'intérêt annuel sur le capital.

☞ Le résultat est trouvé sous forme décimale et présenté sous forme de pourcentage.

- L'**intérêt** est le loyer de la somme placée ou prêtée.
- Intérêt annuel = taux × capital ; $\text{Taux} = \dfrac{\text{intérêt annuel}}{\text{capital}}$; $\text{C}apital = \dfrac{\text{intérêt annuel}}{\text{taux}}$
- Intérêt total = intérêt annuel × durée du placement en année
- Une variable, exprimée en pourcentage dans une formule mathématique, sera utilisée dans le calcul, dans la plupart des cas, sous sa forme décimale sans pourcentage.
- **Année monétaire** = 360 jours (elle a un sens pour une durée ≤ 11 mois)
- **Année commerciale** = 360 jours = 12 mois de 30 jours (elle a un sens au delà d'une durée d'un an, ce mode de calcul de jours n'est pas intégré dans la calculatrice).

Exercice corrigé : ***Calcul des intérêts***

Pour l'achat d'un véhicule, une banque accepte de prêter 1 200 € pendant 2 ans à un taux de 9%.

Quel est l'intérêt annuel de ce prêt ? Quel est l'intérêt total ? Quelle est la somme à rembourser ?

Corrigé de l'exercice :

Le taux étant de 9%, l'intérêt annuel est les $\dfrac{9}{100}$ de la somme empruntée. Il sera donc de : $1\,200 \times \dfrac{9}{100} = 108$ € *(intérêt annuel = taux × capital).*

L'intérêt étant proportionnel à la durée du prêt, il sera pour deux ans de : 108 × 2 = 216 €. *(Intérêt total = intérêt annuel × durée du placement en année)*

La somme à rembourser est égale au capital emprunté surajouté de l'intérêt total. Dans ce cas présent cette somme S sera : 1 200 € + 216 € = 1 416 €.

<u>Exercice corrigé</u> : ***Calcul du taux de placement***

Pour un emprunt de 2 400 € pendant 1 an 4 mois et 10 jours, une banque demande un intérêt de 196 €. Quel est le taux de placement ?

Corrigé de l'exercice :

Calculons d'abord l'intérêt à payer par an, en utilisant l'année commerciale :

1 an	=	360 jours
4 mois	=	120 jours
10 jours	=	10 jours
1 an 4 mois 10 jours	=	490 jours

Si pour 490 jours l'intérêt est de 196 €, pour 1 jour, il sera 490 fois plus faible et pour 360 jours 360 fois plus élevé que pour 1 jour. Soit : $196 \times \frac{360}{490} = 144$ €. L'intérêt annuel est donc de 144 €.

Calculons ensuite le taux de placement :

Si pour 2 400 € l'intérêt annuel est de 144 €, pour 1 € il sera 2 400 fois plus faible et pour 100 € il sera 100 fois plus élevé que pour 1 €. Soit : $\frac{144 \times 100}{2\,400} = 6$ €.

Le taux de placement est donc de : $\frac{6}{100} = 6\,\%$ ($\text{Taux} = \frac{\text{intérêt annuel}}{\text{capital}}$).

<u>Exercice corrigé</u> : ***Calcul de la durée du placement***

Un capital de 450 € placé au taux de 4% a rapporté un intérêt total de 41,25 €. Calculer la durée du placement.

Corrigé de l'exercice :

Calculons l'intérêt annuel pour un capital de 450 € au taux de 4% : $450 \times \frac{4}{100} = 18$ €. Calculons la durée du placement : si pour un intérêt de 18 €, l'argent a été placé 360 jours, pour un intérêt de 1 € il aurait été placé 18 fois moins longtemps et pour un intérêt de 41,25 € il aurait été placé 41,25 fois plus longtemps que pour 1 €. Soit : $\frac{360 \times 41{,}25}{18} = 825$ jours

ou 2 ans 3 mois 15 jours

($\text{Durée du placement} = \frac{360\ \text{j} \times \text{intérêt total}}{\text{intérêt annuel}}$).

<u>Exercice corrigé</u> : ***Calcul du capital***

Un capital placé à 4% rapporte 16,9 € en 1 an 3 mois et 18 jours. Quel est ce capital ?

Corrigé de l'exercice :

1 an 3 mois 18 jours = 468 jours. Si en 468 jours l'intérêt est de 16,9 €, en 1 jour il sera 468 fois plus faible et en 360 jours il sera 360 fois plus élevé qu'en 1 jour. Soit : $\frac{16{,}9 \times 360}{468} = 13$ €.

L'intérêt annuel de 13 € représente $\frac{4}{100}$ du capital. Le capital est donc de : $\frac{13 \times 100}{4} = 325$ €. ($Capital = \frac{\text{intérêt annuel}}{\text{taux}}$).

A RETENIR : ***Formules sur les intérêts simples***

$$I = C_0 \times i \times d \; ; \; C_d = C_0(1 + i \times d) \; ; \; C_0 = \frac{C_d}{1 + i \times d}$$

C_0	:	capital de départ : <u>valeur actuelle</u> du capital C_d
i	:	taux d'intérêt (annuel par défaut)
d	:	durée de placement du capital C_0 (par défaut, en année)
I	:	intérêt sur une période d
C_d	:	capital après intérêt sur une période d ; valeur acquise du capital au bout d'une période de durée d .

<u>Exercice 1.1.1 :</u>

Une personne place 2 500 € au taux de 4% d'intérêt simple.

Après 1 an 6 mois, elle reprend son argent et reçoit les intérêts correspondants.

1- Quelle somme reçoit-elle ?

2- Elle replace la somme reçue (capital + intérêt) pendant 6 mois. Cela lui procure un intérêt égal à la moitié de l'intérêt reçu pour le premier placement. A quel taux est effectué le deuxième placement ?

<u>Exercice corrigé</u> : ***Calcul du capital***
Un capital placé au taux trimestriel de 1,5% rapporte en deux ans et demi 75 € en intérêts simples. Quel est ce capital ?

Corrigé de l'exercice :
L'unité de temps pour calculer la durée des intérêts est le trimestre.

On utilise la formule : $C_0 = \frac{I}{i_{1/4} \times d}$ avec $I = 75$ € ; $i_{1/4} = 1{,}5\ \%$; $d = 10$

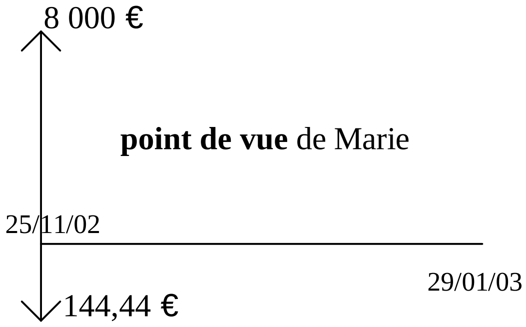
et avec la calculatrice, on obtient : $C_0 = \frac{75}{0{,}015 \times 10} = 500$ €

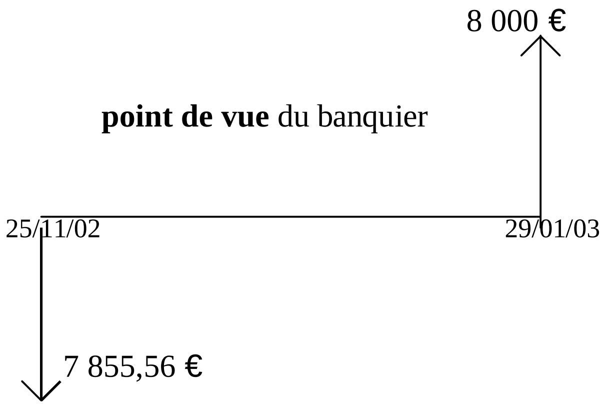
1.2 <u>Problème de l'escompte commercial des effets de commerce</u>

<u>Activité 1.2.1</u> : ***L'escompte sur un effet de commerce***
Au cours d'une transaction commerciale du 25 novembre 2002, François, ayant obtenu ses caisses de vin, a signé une reconnaissance de dette ou plus exactement un **effet de commerce** ou encore une **traite** à Marie, <u>commerçante</u>. Le montant de la dette est de 8 000 € et elle est à payer pour le 29 janvier 2003.
Marie, toujours pressée, décide de ne pas attendre le 29 janvier ; elle s'adresse alors à son banquier avant l'échéance, par exemple, le jour même (le 25 novembre). Tous deux **négocient** ; le banquier avance à Marie l'argent de la traite (ou **escompte** la traite) pour un montant de 8 000 €, moyennant une retenue (appelée **escompte**), proportionnelle au montant de la dette (C_0 = 8 000 €), à la durée associée à la traite (d = 5+31+29 = 65 jours), et au **taux de l'escompte** fixé par le banquier ($\tau = 10\%$).
Ainsi, le 25 novembre 2002, Marie obtient finalement de la part de son banquier : $8\,000 - 8\,000 \times 0{,}10 \times \frac{65}{360} \approx 7\,855{,}56$ € ; elle a pu, grâce à son banquier, toucher en avance le montant de la traite, mais cela lui a coûté l'escompte : $8\,000 \times 0{,}10 \times \frac{65}{360} \approx 144{,}44$ €.

Dans ce type d'opération, l'escompte ou les intérêts payés au banquier sont versés au début de l'opération financière, les intérêts sont dits précomptés, le taux d'escompte est dit précompté.

Diagrammes des flux :





A RETENIR :

Effet de commerce = **traite** = lettre de change

Escompter = se faire payer la traite avant l'échéance

Escompte : $E = C_0 \times \tau \times d$ (l'intérêt retenu par le banquier)

C_0 : valeur nominale de la traite

τ : taux d'escompte (annuel)

d : durée de l'escompte en année.

Encaissement du porteur de la traite dans l'opération de l'escompte (ou valeur actuelle de l'effet commercial) :

$$C = C_0 - E$$

Exercice corrigé :

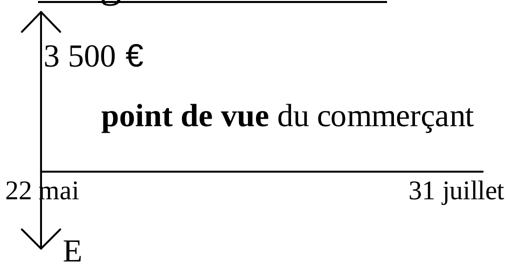
Un commerçant décide d'escompter le 22 mai, un effet de commerce qu'il détient sur un de ses clients. Les caractéristiques de l'effet sont les suivantes : - valeur nominale : 3 500 €

- taux d'escompte : 7,5%
- date d'échéance : 31 juillet

Calculez l'escompte commercial et la valeur d'encaissement (aussi appelée valeur actuelle commerciale)

Corrigé de l'exercice :

Diagramme des flux :



Le nombre de jours entre le 22 mai et le 31 juillet est égal à 70 jours (9+30+31=70). Donc, l'escompte commercial est égal à :

$$E = C_0 \times \tau \times d = 3\,500 \times 0{,}075 \times \frac{70}{360} \approx 51{,}04\text{ €}$$

La valeur d'encaissement est égal à :

$$C = C_0 - E \approx 3\,500 - 51{,}04 = 3\,448{,}96\text{€}$$

<u>Exercice 1.2.2 :</u>
La valeur actuelle d'un effet dont le nominal est 3 700 € payable dans 30 jours, est 3 656,06 €. Calculer le taux de l'escompte.

<u>Exercice 1.2.3 :</u>
La valeur actuelle d'une traite payable dans 43 jours est de 7 262,21 € au taux de 10%. Calculer la valeur nominale de cette traite.

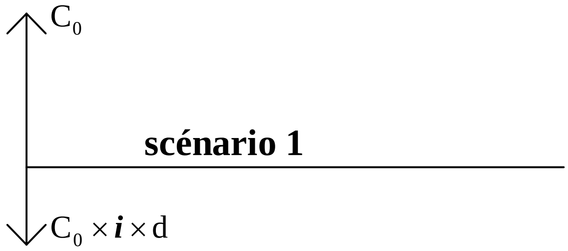
1.3 <u>Problème d'équivalence entre le taux d'intérêt précompté et le taux d'intérêt post-compté</u>

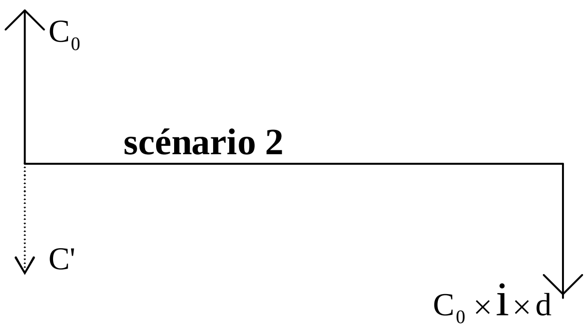
<u>Activité 1.3.1</u> : ***Le taux précompté - le taux post-compté***
Marie emprunte une somme de C_0 = 10 000 € à une banque pour une durée de 7 mois = d=7/12 année. On suppose qu'il y ait deux scénarios équivalents :

scénario 1 : le <u>taux d'intérêt précompté</u> est de i = 7%

scénario 2 : le <u>taux d'intérêt post-compté</u> est de $\mathbf{i}$.

On obtient les deux diagrammes des flux avec le point de vue de Marie :





Dans le scénario 2, la valeur actuelle, en début d'échéance, de $C_0 \times \mathbf{i} \times d$ est notée C'.

La valeur acquise de C' sur une période d est : $C'(1+ \mathbf{i} \times d) = C_0 \times \mathbf{i} \times d$

donc : $C' = \dfrac{C_0 \times \mathbf{i} \times d}{1+\mathbf{i} \times d}$

Les deux scénarios sont équivalents lorsque les deux valeurs actuelles correspondant aux deux scénarios sont égales :

$$VA_1 = C_0(1 - i \times d) \quad \text{et} \quad VA_2 = C_0 - \frac{C_0 \times \mathbf{i} \times d}{1+\mathbf{i} \times d}$$

$$VA_1 = VA_2 \Rightarrow \boxed{i = \frac{\mathbf{i}}{1+\mathbf{i} \times d} \quad \text{et} \quad \mathbf{i} = \frac{i}{1 - i \times d}} \quad (\mathbf{i} = 7{,}298\%)$$

Remarque : en général, le taux post-compté est celui que l'on utilise par défaut ; on l'appelle **taux effectif** de l'emprunt.

Exercice 1.3.2 :
On propose à un individu deux modes de placement : soit un placement A à intérêt simple au taux de 7%, soit un placement B à intérêt simple précomptés au taux de 6,7%.
1- Lequel de ces deux placements est le plus intéressant ?
2- Pour quel taux annuel d'intérêt simple précompté i_B, le placement B est-il équivalent au placement A ?

1.4 Les intérêts composés

A RETENIR :

- L'intérêt est dit **composé** lorsque le capital primitif est accru de ses intérêts au terme de chaque année et que la nouvelle somme est considérée alors comme un capital pour la nouvelle année.

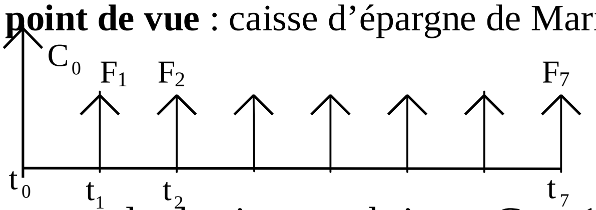
- $C_n = C_0(1+i)^n$; $I = C_n - C_0$
  - C_0 : capital de départ : valeur actuelle du capital C_n
  - i : taux d'intérêt (annuel par défaut)
  - n : nombre fractionnaire de périodes (par défaut, en année)
  - C_n : valeur acquise du capital C_0 pendant n périodes
  - I : les intérêts sur n périodes

Activité 1.4.1 : ***intérêts composés***
Marie place à sa banque 10 000 € à un taux de 4,5% à intérêts composés, pendant 7 ans.
Quelle somme obtient-elle au bout de la première année, puis de la seconde et enfin, au bout de 7 ans ? (Représentez le diagramme des flux avec le point de vue de Marie).

Corrigé de l'activité :

Diagramme des flux :

point de vue : caisse d'épargne de Marie



A l'origine : C_0 = 10 000 €

Au bout d'un an : $C_1 = C_0 + C_0 \times i = C_0 (1+i)$

Au bout de 2 ans : $C_2 = C_1 + C_1 \times i = C_0 (1+i)^2$

Au bout de 7 ans : $C_7 = C_6 + C_6 \times i = C_0 (1+i)^7$

$t_1 = t_0 + 1$ an ; …. ; $t_7 = t_0 + 7$ ans. Avec la calculatrice, on obtient : C_1 = 10 450 € ; C_2 = 10 920,25 € ; $C_7 \approx$ 13 608,62 €

Exercice corrigé :

Un capital placé à intérêts composés pendant 8 années, à un taux de 12%, donne une valeur acquise de 86 658,71 €. Retrouvez le montant du capital.

Corrigé de l'exercice :

On applique la formule : $C_n = C_0(1+i)^n$ avec n=8 ans ; i=12% ; C_8 = 86 658,71 €.
Donc le montant du capital est obtenu avec la calculatrice :
$C_0 = \frac{C_8}{(1+i)^8} = \frac{86658{,}71}{1{,}12^8} = 35\,000$ €.

Exercice 1.4.2 :

Quel est au bout de 8 semestres, la valeur acquise d'un capital de 18 000 € placé au taux semestriel de 4,21% ?

Exercice 1.4.3 :

A quel taux est resté placé un capital de 9 000 € ayant acquis en 7 ans une valeur de 12 471 € ?

Exercice 1.4.4 : ***utilisation de fonction log de la calculatrice pour descendre un exposant***

Pendant combien de temps un capital de 7 000 € est-il resté placé à 4,58 % sachant que sa valeur acquise est 11 456 € ?

Exercice 1.4.5 :

Un étudiant décide d'acheter un véhicule d'occasion d'une valeur de 2 159 € et de le payer comptant. Pour réaliser cette opération, il dispose du $\frac{1}{6}$ de la somme à payer sur son compte courant bancaire. Il dispose également d'un salaire de 650 € en espèce qui vient de lui être versé pour son travail en télémarketing les week-end et enfin il désire retirer une partie de l'argent de son livret de caisse d'épargne. Il y a deux ans exactement, il avait versé sur ce dernier compte 1 100 € au taux de 3,5 % avec intérêts composés.

Quelle somme lui restera-t-il sur son livret de caisse d'épargne après avoir effectué le paiement de son véhicule ?

<u>Exercice 1.4.6</u> :
Un épargnant veut placer 10 000 € à la banque. On lui propose 2 types de placement : a- un placement à 4% en intérêts composés pendant 2 ans
b- un placement à 5,5% en intérêts simples pendant 1 an 6 mois.
Quel est le placement le plus avantageux ?

1.5 <u>Problème du changement d'unité de temps de référence</u>

<u>Activité 1.5.1</u> : **Le taux équivalent – le taux proportionnel**
Soit un capital C_0 placé au taux i = 6 %.
1- Quelle est la valeur acquise de C_0 au bout d'un an ?
2- Quelle est la valeur acquise de C_0 au bout d'un an, l'unité de temps étant le mois ?

Corrigé de l'activité :
1- $C_1 = C_0(1+i)^1 = C_0(1+i) = 1{,}06 \times C_0$; i : taux d'intérêt simple ou composé.
2- La période de référence étant le mois, il faut d'abord déterminer le taux mensuel.
- ***méthode proportionnelle*** : $\mathbf{i_{1/12} = i / 12}$ = 0,06 / 12 = 0,5 % ; d = 12 mois ;
  - *Si $i_{1/12}$ est un taux d'intérêt simple mensuel alors :*
$$C_{1an} = C_0(1+i_{1/12} \times d) = C_0(1+(0{,}06/12)\times 12) = 1{,}06 \times C_0 = C_1$$
  - *Si $i_{1/12}$ est un taux d'intérêt composé mensuel alors :*
$$C_{1an} = C_0(1+i_{1/12})^{12} = C_0(1+(0{,}06/12))^{12} = 1{,}005^{12} \times C_0 \approx 1{,}0617 \times C_0 \neq C_1$$

- ***méthode taux équivalent :*** $i_{1/12}$ satisfait l'égalité :
$$C_1 = C_0(1+i)^1 = C_0(1+i_{1/12})^{12} \quad \text{d'où :} \quad i_{1/12} = (1+i)^{1/12} - 1 = (1{,}06)^{1/12} - 1 \approx 0{,}487\%$$
  - *Si $i_{1/12}$ est un taux d'intérêt simple mensuel alors :*
$$C_{1an} = C_0(1+i_{1/12} \times d) = C_0(1+ 0{,}00487 \times 12) = 1{,}05844 \times C_0 \neq C_1$$
  - *Si $i_{1/12}$ est un taux d'intérêt composé mensuel alors :*
$$C_{1an} = C_0(1+i_{1/12})^{12} = C_0(1+i) = 1{,}06 \times C_0 = C_1$$

<u>Remarque</u> : dans la plupart des cas pratiques, c'est le taux proportionnel qui est utilisé.

A RETENIR : ***transformations taux annuel - taux mensuel***

- Soit i le taux (annuel) connu, alors le taux mensuel correspondant est :
  - Cas taux proportionnel : $\mathbf{i_{1/12} = i / 12}$
  - Cas taux équivalent : $i_{1/12} = (1+i)^{1/12} - 1$
- Soit $i_{1/12}$ le taux mensuel connu, alors le taux annuel correspondant est :
  - Cas taux nominal : $\mathbf{i = 12 \times i_{1/12}}$
  - Cas taux actuariel : $i = (1+i_{1/12})^{12} - 1$

Exercice corrigé :
Etablir les formules de transformations taux annuel - taux trimestriel.

Corrigé de l'exercice :
- Soit i le taux (annuel) connu, alors le taux trimestriel correspondant est :
  - Cas taux proportionnel : $\mathbf{i_{1/4} = i / 4}$
  - Cas taux équivalent : $i_{1/4} = (1+i)^{1/4} - 1$
- Soit $i_{1/4}$ le taux trimestriel connu, alors le taux annuel correspondant est :
  - Cas taux nominal : $\mathbf{i = 4 \times i_{1/4}}$
  - Cas taux actuariel : $i = (1+i_{1/4})^{4} - 1$

Exercice 1.5.2 :
Vous envisagez d'ouvrir un compte d'épargne dans une banque. Laquelle des trois banques ci-dessous propose le taux d'intérêt le plus avantageux ?
Banque n°1 : 6,7% nominal annuel, composé trimestriellement.
Banque n°2 : 6,65% nominal annuel, composé mensuellement.
Banque n°3 : 6,85% nominal annuel, composé annuellement.

1.6 Tenue de compte courant commercial

Elle consiste à enregistrer les opérations comptables quotidiennes en tenant compte des intérêts produits entre les dates d'enregistrement comptables. Nous proposons 3 méthodes standard de calculs d'intérêt.

Activité 1.6.1 : méthode directe

Les opérations comptables du compte de la société Durand sont enregistrées pendant la période du 8 avril au 7 mai 2006.

- le 8 avril, le solde est créditeur : 90 000 €
- le 12 avril, un chèque de 170 000 € d'un client est encaissé
- le 19 avril, un virement d'achat de 90 000 € est effectué
- le 30 avril, un encaissement d'une traite à 190 000 €
- le 6 mai, remboursement d'une dette de 60 000 €.

La banque qui gère le compte de la société Durand utilise un **taux réciproque** d'intérêts à 4% ; les comptes sont arrêtés tous les 7 du mois.

- Représenter le diagramme des flux
- Dresser le compte de la société Durand par la **méthode directe**

On rappelle la formule donnant les intérêts à la date de calcul t_f.

$$\boxed{I = \sum_{j=1}^{k} F_j \times \frac{n_j}{360} \times i}$$

i : taux réciproque d'intérêt
k : le nombre total de flux
F_j : le montant algébrique du flux j ;
F_1 : est le flux du solde à l'origine de la période
$n_j = t_f - t_j$: durée en jours entre les dates de calcul et du flux j .

Opération	Débit	Crédit	Date de Valeur	jours	Nombres	
					Débit	Crédit
Solde créditeur		90 000,00	08/04	29		2 610 000,00
Encaissement chèque						
Virement d'achat						
Encaissement traite						
Remboursement dette						
Totaux						
Balance						
Intérêts acquis au 7 mai		I ≈				
Solde au 7 mai						

Activité 1.6.2 : **méthode indirecte**

On reprend l'énoncé de l'activité 1.6.1 .

- Dresser le compte de la société Durand par la **méthode indirecte**.

On rappelle la formule donnant les intérêts à la date de calcul t_f :

$$I = \left(\sum_{j=1}^{k} F_j \times i \right) \times \left(\frac{t_f - t_1}{360} \right) - \sum_{j=1}^{k} F_j \times \frac{t_j - t_1}{360} \times i$$

i : taux réciproque d'intérêt

k : le nombre total de flux

F_j : le montant algébrique du flux j ;

F_1 : est le flux du solde à l'origine de la période

t_j : date correspondant au flux j .

On décompose I en deux membres : $I = I_1 - I_2$.

Opération	Débit	Crédit	Intérêts annuels	
			Débit	Crédit
Solde créditeur		90 000,00		3 600,00
Encaissement chèque				
Virement d'achat				
Encaissement traite				
Remboursement dette				
Totaux				
Balance				
I1		**I1≈**		

Opération	Débit	Crédit	Date de Valeur	jours	Nombres	
					Débit	Crédit
Solde créditeur		90 000,00	08/04	0		0
Encaissement chèque						
Virement d'achat						
Encaissement traite						
Remboursement dette						
Totaux						
Balance						
I2		**I2≈**				
Intérêts acquis au 7 mai		**I≈**				
Solde au 7 mai						

Activité 1.6.3 : **méthode Hambourgeoise**
On reprend l'énoncé de l'activité 1.6.1 .
- Dresser le compte de la société Durand par la **méthode Hambourgeoise**

On rappelle la formule donnant les intérêts à la date de calcul t_f :

$$\boxed{I = \sum_{j=1}^{k}\left(\sum_{l=1}^{j} F_l\right) \times \left(\frac{t_{j+1} - t_j}{360}\right) \times i}$$

i : taux d'intérêt ; k : le nombre total de flux ;
F_j : le montant algébrique du flux j ;
F_1 : est le flux du solde à l'origine de la période ;
$t_{k+1} = t_f$: date de calcul.

Opération	Débit	Crédit	SOLDE		Date de	jours	Nombres	
			Débit	Crédit	Valeur		Débit	Crédit
Solde créditeur		90 000		90 000	08/04	4		360 000
Encaissement chèque		170 000		260 000	12/04			
Virement d'achat								
Encaissement traite								
Remboursement dette								
Totaux								
Balance								
Intérêts acquis au 7 mai				**I≈**				
Solde au 7 mai								

Remarque : - Cette méthode de gestion comptable est robuste ; en cas d'erreur sur une date associée à un flux, le calcul de l'intérêt se corrige aisément en changeant un terme de la somme.

- Cette méthode est assez souple d'utilisation car on peut arrêter le compte à une date quelconque sans recommencer tous les calculs.

Exercice :
Les opérations comptables de la société Durand entre le 28 mars et le 21 avril se résument de la façon suivante :

- le 28 mars, le solde est créditeur : 15 000 €
- le 30 mars, frais divers d'entretien : 2 300 €
- le 7 avril, encaissement d'un chèque de la société Dupont : 18 000 €
- le 10 avril, paiement de frais de publicité : 700 €
- le 15 avril, remboursement d'emprunt à la banque CL : 10 000 €

La banque qui gère le compte de la société Durand, arrête les comptes le 21 avril. Sachant que le taux d'intérêt est de 3%,

- représenter le diagramme des flux
- dresser le compte de la société Durand par la méthode que vous souhaitez.