MAÎTRISE DES BASES DE MATHÉMATIQUES

SÉANCE N° 1

PRODUITS - DIVISIBILITÉ - FRACTIONS
RAPPELS DES NOTIONS DE BASE

Les étudiants devront lire et bien comprendre les **activités** pour se remémorer les notions de base présentées dans les cursus primaire et secondaire. Les **exercices** qui suivront ont pour but de maîtriser ces notions, ils devront être traités sérieusement : rigueur, rapidité et présentation soignée. Les **mémentos** présentés dans un encadré rappellent des définitions, des règles et des méthodes qui devront être apprises et retenues définitivement.

- A - PRODUITS

Activité A1 :
x et y étant des nombres entiers, complétez les implications suivantes :

1- $a \neq 0$ et $a \times x = a \Rightarrow x =$
2- $a = 0 \Rightarrow a \times x =$
3- $x = 0 \Rightarrow a \times x =$
4- $a = x = 0 \Rightarrow a.x =$
5- $a.b = 6 \Rightarrow a =$ et $b =$ (*4 solutions*)
6- $a = 0$ et $a \times x = a \Rightarrow$
7- $a \neq 0$ et $a \times x = 0 \Rightarrow x =$
8- $a.b = 1 \Rightarrow a = b =$
9- $a.b = 7 \Rightarrow a =$ et $b =$ (*2 solutions*)

Corrigé de l'activité :

1- $a \neq 0$ et $a \times x = a \Rightarrow x = a / a = 1$
2- $a = 0 \Rightarrow a \times x = 0$
3- $x = 0 \Rightarrow a \times x = 0$
4- $a = x = 0 \Rightarrow a.x = 0 \times 0 = 0$
5- $a.b = 6 \Rightarrow$ ($a = 1$ et $b = 6$) ou ($a = 6$ et $b = 1$) ou ($a = 2$ et $b = 3$) ou ($a = 3$ et $b = 2$)
6- $a = 0$ et $a \times x = a \Rightarrow x$ est entier quelconque
7- $a \neq 0$ et $a \times x = 0 \Rightarrow x = 0$
8- $a.b = 1 \Rightarrow$ ($a = b = 1$) ou ($a = b = -1$)
9- $a.b = 7 \Rightarrow$ ($a = 1$ et $b = 7$) ou ($a = 7$ et $b = 1$) (7 est un nombre premier)

<u>Activité A2</u> :

Les dimensions d'un pavé sont 7 cm, 5 cm et 4 cm. En utilisant la formule :
V = aire de base × hauteur, calculez de trois façons différentes le volume de ce pavé.
Quelles propriétés du produit avez-vous utilisées ?

Corrigé de l'activité :

1ère façon : aire de base = 7×5 cm^2 et hauteur = 4 cm. Alors : $V = (7 \times 5) \times 4 = 35 \times 4 = 140$ cm^3
2ème façon : aire de base = 7×4 cm^2 et hauteur = 5 cm. Alors : $V = (7 \times 4) \times 5 = 28 \times 5 = 140$ cm^3
3ème façon : aire de base = 5×4 cm^2 et hauteur = 7 cm. Alors : $V = (5 \times 4) \times 7 = 20 \times 7 = 140$ cm^3

On a donc : $(7 \times 5) \times 4 = (7 \times 4) \times 5 = (5 \times 4) \times 7$: on vient d'utiliser les propriétés de commutativité et d'associativité du produit.

<u>Exercice A1 :</u>

Pour aller de A à B, j'ai deux chemins possibles au départ de A. Au premier carrefour M, j'ai le choix entre trois chemins menant tous au second carrefour P, où cinq chemins me conduisent en B. Combien y a-t-il de chemins possibles pour aller de A vers B ?

<u>Voir « CORRIGE-A1 »</u>

<u>Activité A3</u> :

Soient a et b deux nombres entiers.
1- Que devient le produit a.b si l'on multiplie un des facteurs par 5 ?
2- Si l'on augmente a.b de 336, on obtient le résultat de la question précédente. Déterminez a.b .
3- De plus, on suppose que $10 < a < 20$, déterminez a et b (2 solutions).

Corrigé de l'activité :

1-
- Si l'on multiplie a par 5, le produit devient : $(5a)b = 5\,ab$
- Si l'on multiplie b par 5, le produit devient : $a(5b) = 5\,ab$

2- $5\,ab = ab + 336$ ce qui équivaut à : $4\,ab = 336$, ce qui équivaut à : $ab = 336 / 4 = 84$

3- ($ab = 84$ et $10 < a < 20$) $\Rightarrow$ ($b = 84 / a$ et $10 < a < 20$)
($b = 84 / a = 2^2 \times 3 \times 7 / a$ et $10 < a < 20$; a divise 84)
L'ensemble des diviseurs de 84 est :
$\{2 \,;\, 2^2 = 4 \,;\, 2^2 \times 3 = 12 \,;\, 2 \times 3 = 6 \,;\, 2 \times 7 = 14 \,;\, 2^2 \times 7 = 28 \,;\, 3 \times 7 = 21 \,;\, 3 \,;\, 7\}$
donc a est égal à 14 ou à 12 et $b = 84 / 14 = 6$ ou $b = 84 / 12 = 7$
donc $(a \,;\, b) = (14 \,;\, 6)$ ou $(a \,;\, b) = (12 \,;\, 7)$.

$$\begin{array}{r|l} 84 & 2 \\ 42 & 2 \\ 21 & 3 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$$

<u>Exercice A2 :</u>

Si l'on ajoute 5 à a, le produit a.b augmente de 160. Trouvez b. Calculez a sachant que $ab = 768$

<u>Voir « CORRIGE-A2 »</u>

<u>Exercice A3 :</u>
Soient les expressions suivantes :
$(8 \times 5) + (12 \times 5)$; $(12 \times 5) - (8 \times 5)$; $(7 \times 3) + (3 \times 4) + (9 \times 3)$
$(4 \times 16) + (5 \times 4) - (4 \times 18)$; $(24 \times 23) + (15 \times 23) + (23 \times 50) + (14 \times 23) - (23 \times 3)$

Effectuez les calculs d'abord directement, puis ensuite, après une mise en facteur commun.

<u>Voir « CORRIGE-A3 »</u>

- B - PUISSANCE D'UN NOMBRE

<u>Activité B1</u> :
Comment écrivez-vous plus simplement :
$7 \times 7 \times 7 \times 7$; $3 \times 3 \times 3\times 3\times 3$; $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$;
$9 \times 9 \times \ldots \times 9$ (9 facteurs) ; $10 \times 10 \times \ldots \times 10$ (23 facteurs) ;
$12 \times 12 \times \ldots \times 12$ (n facteurs) ; $a \times a \times a$;
$b \times b \times \ldots \times b$ (15 facteurs) ; $c \times c \times \ldots \times c$ (n facteurs)

<u>Corrigé de l'activité</u> :
$7 \times 7 \times 7 \times 7 = 7^4$; $3 \times 3 \times 3\times 3\times 3 = 3^5$; $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^8$;
$9 \times 9 \times \ldots \times 9$ (9 facteurs) $= 9^9$; $10 \times 10 \times \ldots \times 10$ (23 facteurs) $= 10^{23}$;
$12 \times 12 \times \ldots \times 12$ (n facteurs) $= 12^n$; $a \times a \times a = a^3$;
$b \times b \times \ldots \times b$ (15 facteurs) $= b^{15}$; $c \times c \times \ldots \times c$ (n facteurs) $= c^n$

A RETENIR

Puissances remarquables **:** $0^n = 0$ à condition que $n \neq 0$
$1^n = 1$; $a^0 = 1$; $a^1 = a$

Produit de puissances **:** $a^m \times a^p = a^{m+p}$
$a^m \times a^p \times a^q = a^{m+p+q}$

Puissance de puissance **:** $(a^m)^p = a^{m \times p}$

Puissance d'un produit **:** $(a \times b \times c)^n = a^n \times b^n \times c^n$

<u>Exercice corrigé</u> :
1- Calculez l'aire S d'un rectangle dont les dimensions sont 7cm et 4cm. On multiplie chacune de ces dimensions par 5. Que devient l'aire S' de ce nouveau rectangle ?
2- Quelle relation peut-on écrire entre S et S' ?
3- Que devient le produit a.b si l'on multiplie chaque facteur par 2 ? par 6 ? par 10 ? par n ?

Corrigé de l'exercice :

1- $S = 7 \times 4 = 28$ cm^2 ; $S' = (5 \times 7) \times (5 \times 4) = 35 \times 20 = 700$ cm^2
2- $S' = 5^2.S = 25\ S$
3- Multiplication de chaque facteur par 2 : $(2 \times a) \times (2 \times b) = 2^2\,ab = 4\,ab$
   Multiplication de chaque facteur par 6 : $(6 \times a) \times (6 \times b) = 6^2\,ab = 36\,ab$
   Multiplication de chaque facteur par 10 : $(10 \times a) \times (10 \times b) = 10^2\,ab = 100\,ab$
   Multiplication de chaque facteur par n : $(n \times a) \times (n \times b) = n^2\,ab$

<u>Exercice B1 :</u>

1- Que devient l'aire $S = a.b$ d'un rectangle si l'on multiplie la longueur a par 3 et la largeur b par 5 ?
2- Sachant que le nouveau rectangle mesure 882 m^2 de plus que le premier, calculez S, puis la longueur du rectangle primitif s'il mesure 7 m de large.

<u>Voir « CORRIGE-B1 »</u>

<u>Exercice B2 :</u>

Complétez sans calculatrice le tableau ci-dessous :

n	**2n**	**n^2**	**$2n^2$**	**3n**	**n^3**
1					
2					
3					
4					
5					

<u>Voir « CORRIGE-B2 »</u>

<u>Exercice corrigé</u> :

1- En utilisant la formule : $a^n \times b^n = (a \times b)^n$, calculez plus simplement :
   $2^6 \times 5^6$; $4^3 \times 25^3$; $125^3 \times 8^3$; $5^5 \times 4^5$
2- En utilisant la formule : $a^{n+p} = a^n \times a^p$, calculez plus simplement :
   5^7 ; 3^{10} ; 4^9 ; 2^{20}
3- Ecrivez le plus simplement possible :
   $3a + 2a$; $3a - 2a$; $a^3 \times a^2$; $(a^3)^2$; $(a^2)^3$
4- Ecrivez $a^2\,b^6$ sous forme d'un carré, puis $a^3\,b^9$ sous forme d'un cube.
   Calculez le produit de ce deux nombres.

Corrigé de l'exercice :

1- $2^6 \times 5^6 = (2 \times 5)^6 = 10^6$; $4^3 \times 25^3 = (4 \times 25)^3 = 100^3 = (10^2)^3 = 10^{2 \times 3} = 10^6$
   $125^3 \times 8^3 = (125 \times 8)^3 = 1000^3 = (10^3)^3 = 10^{3 \times 3} = 10^9 = 10^9$;
   $5^5 \times 4^5 = (5 \times 4)^5 = 20^5$
2- 5^7 exige 6 multiplications, devenant de plus en plus longues. En écrivant : $5^7 = 5^3 \times 5^4$, on réduit les calculs à 4 multiplications. En effet, 5^3 exige 2 multiplications, ce qui entraîne une seule multiplication pour $5^4 = 5^3 \times 5$ et une autre pour calculer $5^3 \times 5^4$
   $3^{10} = 3^5 \times 3^5$: on passe de 9 multiplications à 5 multiplications
   $4^9 = 4^4 \times 4^5$: on passe de 8 multiplications à 5 multiplications
   $2^{20} = 2^{10} \times 2^{10}$: on passe de 19 multiplications à 10 multiplications.

3- $3a + 2a = (3+2)\,a = 5a$; $3a - 2a = (3-2)\,a = a$
$a^3 \times a^2 = a^{3+2} = a^5$; $(a^3)^2 = a^{3\times2} = a^6$; $(a^2)^3 = a^{2\times3} = a^6$
4- $a^2\, b^6 = a^2\, b^{3\times2} = a^2\, (b^3)^2 = (a\, b^3)^2$; $a^3\, b^9 = a^3\, b^{3\times3} = a^3\, (b^3)^3 = (a\, b^3)^3$
$a^2\, b^6 \times a^3\, b^9 = a^{2+3}\, b^{6+9} = \mathbf{a^5\, b^{15}} = \mathbf{(a\, b^3)^5} = (a\, b^3)^{2+3} = (a\, b^3)^2 \times (a\, b^3)^3$

<u>Exercice corrigé</u> :

1- Sans calculer 4^9 ni 2^{20}, pouvez-vous comparer ces deux nombres ?
Quelle formule avez-vous utilisée ?
2- De la même façon, comparez : 3^6 et 27^2 ; 16^3 et 2^{20}
3- Comment peut-on écrire : $(7^2)^4$; $[(3a)^5]^2$; $[(ab)^3]^7$?

Corrigé de l'exercice :

1- En utilisant la formule : $a^{n+p} = a^n \times a^p$ on obtient : $2^{20} = 2^{18} \times 2^2$
En utilisant la formule : $(a^n)^p = a^{n\times p}$ on obtient : $2^{18} = 2^{2\times9} = (2^2)^9 = 4^9$
Par conséquent : $\mathbf{2^{20}} = 2^{18} \times 2^2 = 4^9 \times 4 > \mathbf{4^9}$
2- $27 = 3^3$ et donc : $\mathbf{27^2} = (3^3)^2 = 3^{3\times2} = \mathbf{3^6}$
$16 = 2^4$ et donc : $\mathbf{16^3} = (2^4)^3 = 2^{4\times3} = 2^{12} < \mathbf{2^{20}}$
3- $(7^2)^4 = 7^{2\times4} = 7^8$; $[(3a)^5]^2 = (3a)^{5\times2} = (3a)^{10} = 3^{10}a^{10}$
$[(ab)^3]^7 = (ab)^{3\times7} = (ab)^{21} = a^{21}b^{21}$

<u>Exercice B3 :</u>

On a : $637 = (6 \times 10^2) + (3 \times 10) + 7$; décomposez de même les nombres ci-dessous en sommes, de façon à faire apparaître les puissances de 10 : 1 967, 1804, 81 dizaines, 830 dizaines, 32 centaines, 407 centaines, 45 mille.

<u>Voir « CORRIGE-B3 »</u>

- C - DIVISIBILITÉ

<u>Activité C1</u> :

Décomposez en produits de facteurs premiers les nombres : 756, 924, 935, 780, 884, 867, 3600 .

Corrigé de l'activité :

• $\begin{array}{r|l} 756 & 2 \\ 378 & 2 \\ 189 & 3 \\ 63 & 3 \\ 21 & 3 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$ • $\begin{array}{r|l} 924 & 2 \\ 462 & 2 \\ 231 & 3 \\ 77 & 7 \\ 11 & 11 \\ 1 & \end{array}$ • $\begin{array}{r|l} 935 & 5 \\ 187 & 11 \\ 17 & 17 \\ 1 & \end{array}$ • $\begin{array}{r|l} 780 & 2 \\ 390 & 2 \\ 195 & 3 \\ 65 & 5 \\ 13 & 13 \\ 1 & \end{array}$ • $\begin{array}{r|l} 884 & 2 \\ 442 & 2 \\ 221 & 13 \\ 17 & 17 \\ 1 & \end{array}$ • $\begin{array}{r|l} 867 & 3 \\ 289 & 17 \\ 17 & 17 \\ 1 & \end{array}$ • $\begin{array}{r|l} 3600 & 2 \\ 1800 & 2 \\ 900 & 2 \\ 450 & 2 \\ 225 & 3 \\ 75 & 3 \\ 25 & 5 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$

$867 = 3 \times 17^2$
$935 = 5 \times 11 \times 17$
$884 = 2^2 \times 13 \times 17$
$780 = 2^2 \times 3 \times 5 \times 13$
$924 = 2^2 \times 3 \times 7 \times 11$
$756 = 2^2 \times 3^3 \times 7$
$3600 = 2^4 \times 3^2 \times 5^2$

Exercice C1 :
Décomposez en produits de facteurs premiers les nombres : 946, 2197, 6300, 45^2, $(9 \times 14)^3$.

Voir « CORRIGE-C1 »

A RETENIR

Nombre premier **:** nombre ($\neq 1$) qui n'est divisible que par lui-même et par 1

Critères de divisibilité **:**

- Un nombre est divisible par 2 $\Leftrightarrow$ son chiffre des unités est pair
- Un nombre est divisible par 3 $\Leftrightarrow$ 3 divise la somme de ses chiffres
- Un nombre est divisible par 4 $\Leftrightarrow$ 4 divise le nombre formé des 2 derniers chiffres
- Un nombre est divisible par 5 $\Leftrightarrow$ son chiffre des unités est 0 ou 5
- Un nombre est divisible par 8 $\Leftrightarrow$ il se termine par 3 zéros ou 8 divise la somme de ses 3 derniers chiffres
- Un nombre est divisible par 9 $\Leftrightarrow$ 9 divise la somme de ses chiffres
- Un nombre est divisible par 10 $\Leftrightarrow$ son chiffre des unités est égal à 0
- Un nombre est divisible par 11 $\Leftrightarrow$ 11 divise la différence entre les sommes des chiffres de rang impair et de rang pair
- Un nombre est divisible par 10^n $\Leftrightarrow$ il se termine par n zéros
- Un nombre est divisible par 25 $\Leftrightarrow$ il se termine par 00, 25, 50 ou 75

Exercice C2 :
Remplacez chaque point par un chiffre de façon que le nombre obtenu soit divisible par 4.
Indiquez toutes les solutions possibles : 38• ; 57• ; 10•8 ; 35•2
L'année 2066 est-elle une année bissextile ?

Voir « CORRIGE-C2 »

Exercice C3 :
Les nombres suivants 793 ; 797 ; 101 ; 989 ; 349 sont-ils premiers ?

Voir « CORRIGE-C3 »

Exercice C4 :
Utilisez la décomposition en produit de facteurs premiers du nombre 108 pour former l'ensemble des diviseurs de ce nombre.

Voir « CORRIGE-C4 »

<u>Activité C2</u> :

1- Ecrivez l'ensemble A des diviseurs de 234 et l'ensemble B des diviseurs de 286.
2- Ecrivez l'ensemble $A \cap B$ des diviseurs communs à A et à B.
   Quel est le plus grand commun diviseur (PGCD) de 234 et de 286 ?
3- Ecrivez l'ensemble $A \cup B$ des diviseurs de A et de B.
   Quel est le plus petit commun multiple (PPCM) de 234 et de 286 ?

Corrigé de l'activité :

1-
$$\begin{array}{r|l} 234 & 2 \\ 117 & 3 \\ 39 & 3 \\ 13 & 13 \\ 1 & \end{array} \qquad 234 = 2 \times 3^2 \times 13 \qquad\qquad \begin{array}{r|l} 286 & 2 \\ 143 & 11 \\ 13 & 13 \\ 1 & \end{array} \qquad 286 = 2 \times 11 \times 13$$

$A = \{1, 2, 3, 13, 2 \times 3, 2 \times 3^2, 3^2, 2 \times 13, 2 \times 3 \times 13, 2 \times 3^2 \times 13, 3 \times 13, 3^2 \times 13\}$
$B = \{1, 2, 11, 13, 2 \times 11, 2 \times 13, 11 \times 13, 2 \times 11 \times 13\}$

2- $A \cap B = \{1, 2, 13, 2 \times 13\}$; $PGCD(234;286) = 2 \times 13 = 26$
3- $A \cup B = \{1, 2, 3, 11, 13, 2 \times 3, 2 \times 3^2, 3^2, 2 \times 11, 2 \times 13, 11 \times 13, 2 \times 3 \times 13, 2 \times 3^2 \times 13, 3 \times 13, 3^2 \times 13, 2 \times 11 \times 13\}$; $PPCM(234;286) = 2 \times 3^2 \times 11 \times 13 = 2574$

A RETENIR

Règle de calcul du PGCD **:**
- Décomposer chaque nombre en produit de facteurs premiers
- Ecrire le produit des facteurs premiers communs à ces nombres
- Donner à chaque facteur le plus petit exposant dans la décomposition

Règle de calcul du PPCM **:**
- Décomposer chaque nombre en produit de facteurs premiers
- Ecrire le produit des facteurs premiers présents dans ces nombres
- Donner à chaque facteur le plus grand exposant dans la décomposition

<u>Exercice corrigé</u> :

Calculer le PGCD et le PPCM des nombres : 396, 429 et 312 ; 364, 375 et 253

Corrigé de l'exercice :

- $396 = 2^2 \times 3^2 \times 11$; $429 = 3 \times 11 \times 13$; $312 = 2^3 \times 3 \times 13$
  $PGCD(396, 429, 312) = 3$; $PPCM(396, 429, 312) = 2^3 \times 3^2 \times 11 \times 13 = 10296$
- $364 = 2^2 \times 7 \times 13$; $375 = 3 \times 5^3$; $253 = 11 \times 23$
  $PGCD(364, 375, 253) = 1$: 364, 375 et 253 sont premiers entre eux.
  $PPCM(364, 375, 253) = 2^2 \times 3 \times 5^3 \times 7 \times 11 \times 13 \times 23 = 34\ 534\ 500$

<u>Exercice C5 :</u>
Trois classes comprenant 24, 36 et 48 élèves assistent à une représentation dans une salle dont toutes les rangées ont le même nombre de places. Toutes les rangées doivent être entièrement occupées, mais les classes doivent rester séparées.
Combien devra-t-on placer d'élèves par rangée pour occuper le moins possible de rangées ?
Combien de rangées chaque classe occupe-t-elle alors ?

<u>Voir « CORRIGE-C5 »</u>

<u>Exercice C6 :</u>
Trois cyclistes parcourent d'une allure régulière une piste circulaire. Le premier fait un tour en 15 mn, le deuxième en 18 mn et le troisième en 20 mn.

S'ils partent ensemble du même point à 14h00, à quelle heure se rencontrent-ils pour la première fois ensemble à leur point de départ ? Combien chacun a-t-il fait de tours ?

<u>Voir « CORRIGE-C6 »</u>

- D - FRACTIONS

<u>Activité C1</u> :

1- Simplifiez les fractions : $\frac{60}{105}$; $\frac{120}{36}$; $\frac{210}{252}$

2- Réduisez au même dénominateur : $\frac{16}{24}$; $\frac{11}{36}$; $\frac{13}{150}$

3- Calculez : $\frac{1}{2}+\frac{6}{15}$; $\frac{33}{18}-\frac{7}{14}$; $\frac{5}{12}\times 4$; $\frac{2}{3}\times\frac{5}{7}$; $\frac{3}{4}\times\frac{2}{5}\times\frac{7}{11}$; $\frac{4}{7}\div 3$; $\frac{3}{4}\div\frac{7}{5}$

Corrigé de l'activité :

1- $\frac{60}{105}=\frac{4\times 15}{7\times 15}=\frac{4}{7}$; $\frac{120}{36}=\frac{120\div 12}{36\div 12}=\frac{10}{3}$; $\frac{210}{252}=\frac{2\times 3\times 5\times 7}{2^2\times 3^2\times 7}=\frac{5}{2\times 3}=\frac{5}{6}$

2- On simplifie la fraction $\frac{16}{24}$ par 8, d'où $\frac{16}{24}=\frac{2}{3}$; $36 = 2^2 \times 3^2$; $150 = 2 \times 3 \times 5^2$

A partir des dénominateurs, PPCM(3 ;36 ;150) = $2^2 \times 3^2 \times 5^2 = 900$

$\frac{2}{3}=\frac{2\times 300}{3\times 300}=\frac{600}{900}$; $\frac{11}{36}=\frac{11\times 25}{36\times 25}=\frac{275}{900}$; $\frac{13}{150}=\frac{13\times 6}{150\times 6}=\frac{78}{900}$

3- $\frac{1}{2}+\frac{6}{15}=\frac{1}{2}+\frac{2}{5}=\frac{5}{10}+\frac{4}{10}=\frac{9}{10}$; $\frac{33}{18}-\frac{7}{14}=\frac{11}{6}-\frac{1}{2}=\frac{11}{6}-\frac{3}{6}=\frac{8}{6}=\frac{4}{3}$;

$\frac{5}{12}\times 4=\frac{5\times 4}{12}=\frac{5\times 4}{3\times 4}=\frac{5}{3}$; $\frac{2}{3}\times\frac{5}{7}=\frac{2\times 5}{3\times 7}=\frac{10}{21}$;

$\frac{3}{4}\times\frac{2}{5}\times\frac{7}{11}=\frac{3\times 2\times 7}{4\times 5\times 11}=\frac{3\times 7}{2\times 5\times 11}=\frac{21}{110}$; $\frac{4}{7}\div 3=\frac{4}{7}\times\frac{1}{3}=\frac{4}{21}$; $\frac{3}{4}\div\frac{7}{5}=\frac{3}{4}\times\frac{5}{7}=\frac{3\times 5}{4\times 7}=\frac{15}{28}$

MAÎTRISE DES BASES DE MATHÉMATIQUES

SÉANCE N° 2

CALCUL SEXAGÉSIMAL – RÈGLE DE TROIS

- E - UNITÉS DE MESURE PHYSIQUE

Activité E1 :

L'angle **a** a une mesure de 33° 02' 15" :

1- Donnez sa mesure en grade, décigrade et centigrade, sans chiffre après la virgule.
2- Avec votre dernier résultat **a'**, effectuez la transformation en degrés, minutes et secondes. Que constatez-vous ?
3- Donnez la mesure du quinzième de **b** sachant que : $b = \frac{2}{3}a$

Corrigé de l'activité :

1- a = 33° 02' 15" ; 90° = 100 gr donc $1° = \frac{100}{90} = \frac{10}{9}gr$ et $33° = 33 \times \frac{10}{9} = \frac{110}{3}gr$

$$1° = \frac{10}{9}gr = 60' \text{ donc } 1' = \frac{10}{9} \times \frac{1}{60} = \frac{1}{54}gr \text{ et } 2' = 2 \times \frac{1}{54} = \frac{1}{27}gr$$

$$1' = \frac{1}{54}gr = 60'' \text{ donc } 1'' = \frac{1}{54} \times \frac{1}{60} = \frac{1}{3240}gr \text{ et } 15' = 15 \times \frac{1}{3240} = \frac{1}{216}gr$$

Par conséquent : $a = \frac{110}{3} + \frac{1}{27} + \frac{1}{216} = \frac{(110 \times 72) + 8 + 1}{216} = \frac{7929}{216} = \frac{881}{24}gr$

On obtient : a ≈ 36,708 gr ; **a ≈ 36gr 7dgr 1cgr**

2- Si **a'** = 36gr 7dgr 1cgr alors **a'** = 36,71 gr. On a : $1gr = \frac{9}{10} = 0{,}9°$ ce qui entraîne :

$a' = 36{,}71 \times 0{,}9° = 33{,}039°$; $0{,}039° = 0{,}039 \times 60' = 2{,}34'$; $0{,}34' = 0{,}34 \times 60'' \approx 20''$

donc **a'** ≈ 33° 2' 20". Il y a 5" d'écart entre **a** et **a'** à cause d'erreurs d'arrondi.

3- le quinzième de **b** est égal à : $\dfrac{b}{15} = \dfrac{1}{15} \times \dfrac{2}{3} a = \dfrac{2}{45} a$

Si a = 33° 2' 15" alors 2a = 66° 4' 30" (2 × 33° = 66° ; 2 × 2' = 4' ; 2 × 15" = 30")

On doit enfin diviser 2a par 45 dans un système sexagésimal :

$$\begin{array}{lll|l}
66° & 04' & 30'' & 45 \\
\cline{4-4}
21° = & \underline{1260'} & & 1° \quad 28' \quad 6'' \\
 & 1264' & & \\
 & 4' = & 240'' & \\
\cline{2-3}
 & & 270'' & \\
 & & 00 &
\end{array}$$

Donc : $\dfrac{b}{15} = 1° \;\; 28' \;\; 6''$

A RETENIR

***Système décimal* :**

- 1 kilogramme (**kg**) = 10 hectogrammes (**hg**) = 1 000 grammes (**g**)
- 1 quintal : 1 **q** = 100 **kg** ; 1 tonne : 1 **t** = 1 000 **kg**
- 1 litre (**l**) = 10 décilitres (**dl**) = 100 centilitres (**cl**) = 1 000 millilitres (**ml**)
- 1 décalitre (**dal**) = 10 **l** ; 1 hectolitre (**hl**) = 100 **l** ;
- 1 **l** = 1 $\mathbf{dm^3}$; 1 **ml** = 1 $\mathbf{cm^3}$; 1 $\mathbf{m^3}$ = 1 000 $\mathbf{dm^3}$; 1 $\mathbf{dm^3}$ = 1 000 $\mathbf{cm^3}$
- 1 centiare (**ca**) = 1 $\mathbf{m^2}$; 1 are (**a**) = 100 $\mathbf{m^2}$; 1 hectare (**ha**) = 10 000 $\mathbf{m^2}$
- 1 mètre (**m**) = 10 décimètres (**dm**) = 100 centimètres (**cm**) ;
- 1 micromètre = 1 micron (**µm**) = 0, 000 001 **m** ; 10^6 **µm** = 1 **m**
- 1 **km** = 1 000 **m** ; 1 **hm** = 100 **m** ; 1 **dam** = 10 **m** ;
- 1 grade (**gr**) = 10 décigrades (**dgr**) = 100 centigrades (**cgr**)

***Système sexagésimal* :**

- 1 heure (**h**) = 60 minutes (**mn**) = 3 600 secondes (**s**) ; **1 mn = 60 s**
- 1 degré (°) = 60 minutes (') = 3 600 secondes (") ; **1° = 60' ; 1' = 60"**

***Correspondance* :** **90° = 100 gr =** $\dfrac{\pi}{2}$ **rad** (π = 3,14159265…)

A RETENIR

<u>Les symboles multiples</u>			***<u>Les symboles sous multiples</u>***		
Facteur par lequel est multipliée l'unité	**Préfixe** avant unité	**Symbole** avant unité	**Facteur** par lequel est divisée l'unité	**Préfixe** avant unité	**Symbole** avant unité
1 000 000 000 000 = 10^{12}	téra	T	10	déci	d
1 000 000 000 = 10^9	giga	G	100	centi	c
1 000 000 = 10^6	méga	M	1 000	milli	m
1 000 = 10^3	kilo	k	1 000 000	micro	µ
100 = 10^2	hecto	h	1 000 000 000	nano	n
10 = 10^1	déca	da	1 000 000 000 000	pico	p
			1 000 000 000 000 000	femto	f

- F - CALCUL SEXAGÉSIMAL

Activité F1 :

1- Exprimez 9325 secondes en heures, minutes et secondes.
2- Additionnez 11 h 40 mn à 1 h 35 mn
3- Calculez 6 h 15 mn moins 4 h 50 mn
4- Multipliez 6' 29" par 5
5- Divisez 7 h 18 mn 45 s par 5.

Corrigé de l'activité :

1- Puisqu'une heure correspond à 3600 s, pour trouver le nombre d'heures en 9325 s, on effectue la division par 3600. $9325 = (2 \times 3600) + 2125$
Transformons les 2125 secondes restantes en minutes, en divisant par 60 s.
$2125 = (35 \times 60) + 25$. On obtient ainsi : 9325 s = 2 h 35 mn 25 s

2- On additionne séparément les nombres exprimés dans la même unité, et on procède ensuite à une transformation s'il y a lieu.
11 h 40 mn + 1 h 35 mn = (11 + 1) h (40 + 35) mn = 12 h 75 mn
or 75 mn = 1 h 15 mn, d'où : 12 h 75 mn = 12 h + 1 h 15 mn = 13 h 15 mn

3- On soustrait séparément les nombres ayant la même unité, et on opère ensuite à des transformations si les soustractions sont impossibles.
L'expression 6 h 15 mn - 4 h 50 mn subit une transformation car on ne peut pas retrancher 50 mn à 15 mn. On écrit : 6 h 15 mn = 5 h 75mn , d'où :
6 h 15 mn - 4 h 50 mn = 5 h 75mn - 4 h 50 mn = 1 h 25 mn

4- On multiplie séparément chaque unité, puis on opère, si besoin est, des transformations.
6' 29" × 5 = (6' × 5) + (29" × 5) = 30' 145" or 145" = 2' 25" d'où : 30' 145" = 30' + 2' 25"
6' 29" × 5 = 32' 25"

5- On divise d'abord les heures et les heures restantes sont transformées en minutes que l'on ajoute aux minutes du dividende.
On divise alors les minutes et on transforme les minutes restantes en secondes que l'on ajoute aux secondes du dividende.
Enfin, on divise les secondes pour terminer l'opération.

$$
\begin{array}{lrr|l}
7\text{ h} & 18\text{ mn} & 45\text{ s} & \ 5 \\ \cline{4-4}
2\text{h} = & \underline{120\text{ mn}} & & \ 1\text{ h } 27\text{ mn } 45\text{ s} \\
 & 138\text{ mn} & & \\
 & \underline{135\text{ mn}} & & \\
 & 3\text{ mn} = & \underline{180\text{ s}} & \\
 & & 225\text{ s} & \\
 & & \underline{225\text{ s}} & \\
 & & 0\text{ s} &
\end{array}
$$

Donc : 7 h 18 mn 45 s ÷ 5 = 1 h 27 mn 45 s

Exercice F1 :

Une tour hertzienne de 30 mètres de hauteur est vue par un observateur sous un angle de 2° 8' 58".
A quelle distance de la tour se trouve l'observateur ?

Rappel : Dans un triangle rectangle, la tangente à un angle est égal au côté opposé sur le côté adjacent. On pourra exprimer l'angle en radian, puis utiliser la calculatrice pour calculer la tangente.

Voir « CORRIGE-F1 »

Exercice F2 :
Un groupe de 9 ouvriers du bâtiment commencent un chantier, en moyenne, 52 mn 8 s avant 15 heures. Ils terminent leur travail 137 mn 47 s après 17 heures.

1- Calculez l'heure du début du travail du groupe, l'heure de la fin de travail et la durée du travail.
2- Calculez le temps qu'il faudrait à 5 ouvriers pour faire le même travail.

Voir « CORRIGE-F2 »

- G - RÈGLE DE TROIS

Activité G1 :
Dans une grande société de distribution, une équipe d'employés enregistrent les chèques perçus quotidiennement.

1- En 1 heure, elle traite en moyenne 600 chèques. Combien traite-t-elle de chèques dans la matinée (la demie journée dure 4 heures) ?
2- Si l'on double l'effectif de l'équipe, pour traiter la même quantité de chèques, quelle serait la durée quotidienne de cette activité d'enregistrement des chèques ?

Corrigé de l'activité :

1- Le nombre de chèques traités augmente avec la durée de travail. En 4 heures, l'équipe aura traité $4 \times 600 = 2400$ chèques. On dit que le nombre de chèques enregistrés est **proportionnel** à la durée du travail, ou encore que la durée du travail et le nombre de chèques traités sont des grandeurs **directement proportionnelles**.
2- Deux équipes identiques mettraient seulement 2 heures (la moitié de la matinée) pour effectuer le même travail. Quand le nombre d'équipes augmente, la durée du travail diminue. On dit alors que la durée du travail est **inversement proportionnelle** au nombre d'équipes.

Activité G2 :
Un studio de 25 m^2 vient d'être vendu à 40 000 € dans un immeuble. Un autre studio mitoyen au précédent est aussi à vendre, sa surface est de 28 m^2. Quel est son prix de vente ?

Corrigé de l'activité :
Il y a trois nombres en présence, on effectue une **règle de trois**.

- Si 25 m^2 vaut 40000 € alors pour 1 m^2 le prix sera 25 fois plus faible, soit $\frac{40000}{25} = 1600$ €
- Et pour 28 m^2 , le prix du studio sera 28 fois plus élevé que pour 1 m^2, soit $\frac{40000 \times 28}{25} = 1600 \times 28 = 44800$ € *(40 000 et 44 800 sont exprimés en euros)*

Pour écrire la règle de trois correctement, il faut impérativement que le premier nombre écrit ***soit exprimé dans la même unité*** *que le nombre cherché*

Les grandeurs sont **directement proportionnelles** (la surface et le prix de vente), on a raisonné dans le cadre de la **règle de trois directe**.

<u>Calcul de proportion pour appliquer la règle de trois</u> :
On reprend le problème, la valeur manquante est notée X ; c'est le prix de vente pour le second studio. On représente les séries de nombres proportionnels sur un tableau, en respectant la correspondance.

Prix de vente	40000	X
Surface en m^2	25	28

D'où les proportions : $\frac{40000}{25} = \frac{X}{28}$ ou $\frac{28}{25} = \frac{X}{40000}$

En calculant le produit en croix : 40000 × 28 = 25 × X d'où : $X = \frac{40000 \times 28}{25} = 44800$ €

<u>Activité G3</u> :
Le train TGV roule avec une vitesse moyenne de 210 km/h et relie Paris à Lyon en 2 h 15 mn.
Quel est le temps mis par un train Corail pour effectuer le même trajet sachant que sa vitesse moyenne est de 130 km/h ?

<u>Corrigé de l'activité</u> :
On note que 2 h 15 mn = 2,25 h.
Il y a trois nombres en présence, on effectue une **règle de trois**. Plus la vitesse diminue, plus la durée du trajet augmente ; les grandeurs varient dans des sens inversés.
On représente les séries de nombres inversement proportionnels sur un tableau, en respectant la correspondance.

Durée du trajet	2,25	X
Vitesse du train	210	130

D'où la proportion : $\left(\frac{130}{210}\right)^{-1} = \frac{210}{130} = \frac{X}{2{,}25}$

En calculant le produit en croix : 210 × 2,25 = 130 × X d'où : $X = \frac{210 \times 2{,}25}{130} = 3{,}63\,\text{h}$

On obtient une durée de trajet : 3,63 h = 3 h 37 mn 48 s

<u>Remarque</u> : Notons que dans le calcul de la proportion, les rapports n'ont pas d'unité. On ne pouvait donc pas écrire : $\left(\frac{2{,}25}{210}\right)^{-1} = \frac{210}{2{,}25} = \frac{X}{130}$ car les unités des rapports sont différentes.

Notons que l'on pouvait raisonner plus simplement : la distance parcourue est la même dans les deux cas : 210 × 2,25 = 472,5 = 130 × X. D'où $X = \frac{472{,}5}{130} = 3{,}63\,\text{h}$ = 3 h 37 mn 48 s

Pour écrire la règle de trois correctement, il faut impérativement que le premier nombre écrit ***soit exprimé dans la même unité*** *que le nombre cherché*

Les grandeurs sont **inversement proportionnelles** (la vitesse et le temps), on a raisonné dans le cadre de la **règle de trois inverse.**

Exercice G1 :

Un automobiliste part à 9 h 57 mn et arrive à 13 h 22 mn . Au départ le compteur indiquait 37 878 km, il indique 38 124 km à l'arrivée. Quelle est la vitesse moyenne ?

Voir « CORRIGE-G1 »

Exercice G2 :

1- Sur la carte au 1/200 000, l'itinéraire d'une randonnée allant d'un point à un autre mesure 13,5 cm. Quelle est la distance à parcourir.

2- Combien de temps mettra un véhicule pour effectuer le même trajet, sachant qu'il se déplace à la vitesse moyenne de 50 km/h ?

3- Sur le trajet, le véhicule franchit un pont à la vitesse de 28 km/h. Sachant qu'il met 34 s 2/10 pour le franchir, quelle est en mètres, la longueur du pont ?

4- Pour franchir le même pont, un autre véhicule met 19 s. Quelle est alors sa vitesse moyenne ?

Voir « CORRIGE-G2 »

EXERCICES DE SYNTHÈSE

Exercice G3 :

Un jeune scout participe à une course d'orientation (C.O.) de 5,5 km comprenant 9 balises. Il court à la vitesse moyenne de 6 km/h et reste en moyenne 1 mn 07 s à chaque balise.

1- Combien a-t-il mis pour faire la C.O. ?

2- Au départ la direction à prendre est de 127 gr. Quelle est la valeur en degrés-minutes-secondes ?

3- A la 6° balise il affiche un angle de 12° 22' 30" . Quelle est la valeur de l'angle en grades ?

Voir « CORRIGE-G3 »

Exercice G4 :

Un camion effectue un déplacement de 612 km en 3 étapes :

1$^{\text{ère}}$ étape : départ 9h 05 mn, arrivée 12h 17 mn.

2$^{\text{ème}}$ étape : départ 13h 40 mn, arrivée 19h 03 mn.

3$^{\text{ème}}$ étape : départ 6h 50 mn.

Chaque étape comprend un temps de pause de 20 mn.

1- Sachant que le temps effectif de déplacement lors de la 3$^{\text{ème}}$ étape est égal au 5/4 du temps total de la 1$^{\text{ère}}$ étape, à quelle heure le camion arrivera-t-il à destination ?

2- Lors de la 2$^{\text{ème}}$ étape une crevaison a immobilisé le véhicule pendant 35 mn.

Calculer la vitesse du camion en km/h (pauses et crevaison exclues) sachant qu'elle est la même pour les 3 étapes.

3- En déduire la longueur (en km) de chaque étape.

4- Si le camion devait effectuer la 3$^{\text{ème}}$ étape en ayant augmenté sa vitesse de 10 km/h, à quelle heure arriverait-il à destination en supposant qu'il effectue le trajet sans incident avec une pause de 20 mn ? Quel est le gain de temps.

Voir « CORRIGE-G4 »

MAÎTRISE DES BASES DE MATHÉMATIQUES

SÉANCE N° 3

- H - PARTAGES INÉGAUX

Ce chapitre a pour but d'apprendre à diviser, à partager une grandeur donnée en parties inégales. Deux méthodes sont proposées et à connaître. La première, la méthode graphique, permet de bien comprendre chaque étape de la résolution du problème. La seconde, la méthode algébrique, est plus générale et elle est très efficace pour l'obtention de la solution au problème.

A RETENIR

1ère méthode : **méthode graphique**

1- *Détermination de la part de référence* (après une lecture soigneuse de l'énoncé, toutes les parts du problème sont exprimées simplement en fonction de la part de référence)
2- *Utilisation d'un graphique* (les parts sont exprimées sous forme de multiple de la part de référence ; on ajoute ou on retranche éventuellement une quantité variable)
3- *Calcul de la part de référence* : $\boxed{\text{Part de référence} = \dfrac{\text{Nouveau total à partager}}{\text{Nombre de parts de référence}}}$
(pour obtenir un nombre de parts de référence entier, on pourra être amené à prendre en compte une nouvelle grandeur à partager)
4- *Calcul des parts demandées* (à partir du graphique et de la lecture de l'énoncé, les parts sont calculées sans difficulté)
5- *Vérification* (on vérifie que la somme des parts obtenues est égale au total à partager)

2ème méthode : **méthode algébrique**

1- *Choisir comme inconnue une des parts : X*
2- *Exprimer les valeurs des autres parts en fonction de X et des données de l'énoncé*
3- *Etablir l'équation en X : «* somme des parts obtenues = total à partager »
4- *Résoudre l'équation en X*
5- *Calcul des parts demandées*
6- *Vérification* (on vérifie que la somme des parts obtenues = total à partager)

<u>Activité H1</u> : ***somme et différence des parts connues***
Une société commercialise deux produits SO et PO. Le budget total de publicité s'élève à 14 000 €. Le budget PO dépasse de 2 000 € celui de SO. Quelle est la part de chaque budget ?

Corrigé de l'activité :
1ère méthode : **méthode graphique**
La part de référence est le budget SO

$$\left.\begin{array}{ll} \text{- budget PO :} & |\underline{\qquad\qquad}|\underline{+2000}| \\ \text{- budget SO :} & |\underline{\qquad\qquad}| \end{array}\right\} \quad 14\,000 \text{ €}$$

En retirant 2 000 € au budget PO, on obtient deux fois la part de référence. Ainsi :
14 000 – 2000 = 12 000 et la part de référence pour le budget SO = 12 000 ÷ 2 = 6 000 €,
la part pour le budget PO = 6 000 + 2 000 = 8 000 €.
Vérification : 6 000 + 8 000 = 14 000, ce qui est bien le budget total de publicité à répartir.

2ème méthode : **méthode algébrique**
- Soit X la valeur du budget de SO.
- La valeur du budget de PO : X + 2000 €
- Le budget total de publicité est égal à : X + (X + 2000 €) = 14 000 €

D'où : 14 000 € = 2 X + 2000 € ; $X = \dfrac{14000 - 2000}{2} = 6000$ €

Conclusion : budget SO = 6000 € ; budget PO = 6000 € + 2000 € = 8000 € et on vérifie bien que : 6000 € + 8000 € = 14 000 €

<u>Activité H2</u> : ***somme des deux parts connue, l'une est multiple de l'autre***
Un commercial vend ses ordinateurs à deux distributeurs. Il partage ses 240 produits de façon que son premier client en reçoit 3 fois plus que son second. Quelle est la part de chaque client ?

Corrigé de l'activité :
Prenons la part du 2ème client comme part de référence. On effectue la représentation graphique suivante :

$$\left.\begin{array}{ll} \text{2ème client :} & |\underline{\quad 1 \quad}| \\ \text{1er client :} & |\underline{\quad 1 \quad}|\underline{\quad 2 \quad}|\underline{\quad 3 \quad}| \end{array}\right\} \text{240 produits}$$

On remarque qu'il y a au total 4 parts de référence, que le 1er client en possède 3 et le 2nd client 1.
D'où : Part du 2ème client = 240 ÷ 4 = 60 ordinateurs
Part du 1er client = 60 × 3 = 180 ordinateurs
Vérification : 60 + 180 = 240, ce qui est bien le nombre total d'ordinateurs à répartir.

2ème méthode : **méthode algébrique**
- Soit X le nombre d'ordinateurs reçus par le 2nd client.
- Le nombre de produits reçus par le 1er client : 3 × X
- Le nombre total d'ordinateurs est égal à : X + (3 × X) = 240

D'où : 240 € = 4 X ; $X = \dfrac{240}{4} = 60$

Conclusion : Part du 2ème client = 60 ordinateurs ; Part du 1er client = 3 × 60 = 180 ordinateurs et on vérifie bien que : 60 + 180 = 240.

<u>Activité H3</u> : ***somme des deux parts connue, l'une est fraction de l'autre***

Comment répartissez-vous la production de 158 626 pièces usinées entre deux ateliers, sachant que la part de production pour l'atelier possédant la vieille machine (**VM**) représente les $\frac{6}{7}$ èmes de la part de production pour l'atelier possédant la machine récente (**RM**) ?

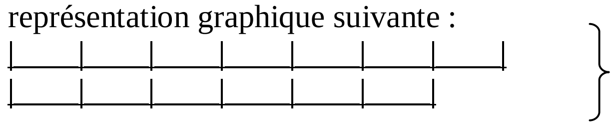
Corrigé de l'activité :

Prenons le $\frac{1}{7}$ de la part de l'atelier RM comme part de référence.

On effectue la représentation graphique suivante :

RM :

VM :



158 626 pièces usinées

On remarque qu'il y a au total 13 parts de référence, l'atelier RM en possède 7 et l'atelier VM 6.

Valeur de la part de référence = 158 626 $\div$ 13 = 12 202

D'où : Part RM = 12 202 $\times$ 7 = 85 414 pièces usinées

Part VM = 12 202 $\times$ 6 = 73 212 pièces usinées

Vérification : 85 414 + 73 212 = 158 626, ce qui est bien le nombre total de pièces à usiner.

2ème méthode : **méthode algébrique**

- Soit X le nombre de pièces à usiner dans l'atelier RM.
- Le nombre de pièces à usiner dans l'atelier VM : $\frac{6}{7} \times X$
- Le nombre total de pièces usinées est égal à : $X + (\frac{6}{7} \times X) = 158\,626$

D'où : $\frac{13}{7}X = 158\,626$; $X = \frac{158\,626 \times 7}{13} = 85\,414$

Conclusion : Part pour l'atelier RM = 85 414 pièces à usiner ;

Part pour l'atelier VM = $\frac{6}{7} \times 85\,414$ = 73 212 pièces à usiner

On vérifie bien que : 85 414 + 73 212 = 158 626.

<u>Activité H4</u> : ***somme des deux parts connue, deux fractions de chaque part sont égales***

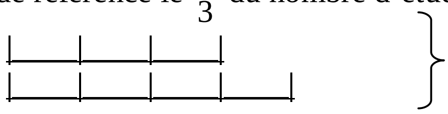
Un établissement universitaire comprend 1 330 étudiants. Le $\frac{1}{3}$ du nombre d'étudiants du 2nd cycle est égal au $\frac{1}{4}$ du nombre d'étudiants du 1er cycle. Quelle est la part de chaque cycle ?

Corrigé de l'activité :

Prenons comme part de référence le $\frac{1}{3}$ du nombre d'étudiants du 2nd cycle.

2nd cycle :

1er cycle :



1 330 étudiants

Le graphique montre qu'il y a au total 7 parts de référence, pour le 2nd cycle nous en avons 3 et pour le 1er cycle nous en avons 4.

Valeur de la part de référence = 1 330 $\div$ 7 = 190

D'où : Part pour le 2nd cycle = 190 $\times$ 3 = 570 étudiants

Part pour le 1er cycle = 190×4 = 760 étudiants

Vérification : 570 + 760 = 1 330, ce qui est bien le nombre total d'étudiants.

2ème méthode : **méthode algébrique**

- Soit X le nombre d'étudiants du 2nd cycle.
- Soit Y le nombre d'étudiants du 1er cycle, on a : $\frac{1}{3}X = \frac{1}{4}Y$
- Le nombre total d'étudiants est égal à : X + Y = 1 330

D'où : $\frac{1}{4}X + \left(\frac{1}{4}Y\right) = \frac{1}{4} \times 1330 = 332{,}5$; $\frac{1}{4}X + \left(\frac{1}{3}X\right) = \frac{7}{12}X = 332{,}5$;

$X = \frac{332{,}5 \times 12}{7} = 570$

Conclusion : Part d'étudiants du 2nd cycle = 570 étudiants ;

Part d'étudiants du 1er cycle : $\frac{1}{3} \times 570 = 190 = \frac{1}{4}Y$, d'où Y = 190×4 = 760 étudiants ;

On vérifie bien que : 570 + 760 = 1 330.

<u>Exercice corrigé H1 :</u>

Le personnel d'une entreprise comprenant 3 000 salariés se divise en cinq catégories. Le personnel de production ouvrier (**PO**), le personnel de production cadre (**PC**), le personnel affecté à la recherche et au développement (**RD**), le personnel marketing (**Mk**) et enfin, la direction et le personnel administratif de gestion (**DA**).

Les ouvriers de production (PO) sont 5 fois plus nombreux que les personnels de la recherche et développement (RD) plus 100 individus. Les cadres (PC) comptent 2 fois plus d'individus que la recherche et le développement (RD) moins 50 individus. Le marketing (Mk) compte 100 individus de plus que la recherche et développement (RD). L'effectif en DA est égal à celui des cadres (PC) plus celui du marketing (Mk) moins 200 individus.

Quel est l'effectif de chaque type de personnel ?

Corrigé de l'exercice :

Le nombre d'individus en recherche et développement est la part de référence.

- Traduction graphique de l'énoncé

```
RD   |___|
PO   |___|___|___|___|___|+100|
PC   |___|___|-50|                        3 000 salariés
Mk   |___|+100|
DA   |___|___|___|-50|+100|-200|
```

- En enlevant 100 individus à l'effectif de PO on obtient 5 parts de référence.
- En ajoutant 50 individus à l'effectif de PC on obtient 2 parts de référence.
- En enlevant 100 individus à l'effectif de Mk on obtient 1 part de référence.
- En ajoutant 150 individus (200-50) à l'effectif de DA on obtient 3 parts de référence.

On obtient donc 12 parts pour 3 000 salariés, la part de référence représente donc :
3000 / 12 = 250 individus.
Effectif de chaque type :

- RD : 1 x 250 = 250 salariés
- PO : (5 x 250) + 100 = 1 350 salariés
- PC : (2 x 250) – 50 = 450 salariés
- Mk : (1 x 250) + 100 = 350 salariés
- DA : (3 x 250) + 50 – 200 = 600 salariés

Total pour vérification : 250 + 1 350 + 450 + 350 + 600 = 3 000

2ème méthode : **méthode algébrique**
- Soit X l'effectif de la section **RD**.
- L'effectif de la section **PO** : $5 \times X + 100$
- L'effectif de la section **PC** : $2 \times X - 50$
- L'effectif de la section **Mk** : $X + 100$
- L'effectif de la section **DA** : $(2 \times X - 50) + (X + 100) - 200$
- L'effectif total de l'entreprise est égal à : $X + [5 \times X + 100] + [2 \times X - 50] + [X + 100] + [(2 \times X - 50) + (X + 100) - 200] = 12 \times X = 3\,000$

D'où : $X = 3\,000 \div 12$; $X = 250$

Conclusion : Part pour chaque catégorie de personnels :
RD = 250 salariés ; PO = (5 x 250) + 100 = 1 350 ; PC = (2 x 250) – 50 = 450 ;
Mk = 250 + 100 = 350 ; DA = (2 x 250 - 50) + (250 + 100) – 200 = 600
On vérifie bien que : 250 + 1 350 + 450 + 350 + 600 = 3 000.

<u>Exercice corrigé H2 :</u>

On ravitaille une station d'essence. Le carburant est réparti dans cinq cuves de volume différent. Le volume total des cuves représente 191,4 m^3. Sachant que

- le volume de la première cuve est égal à deux fois le volume de la deuxième ;
- le volume de la troisième cuve est égal aux 5/3 de celui de la seconde ;
- la quatrième cuve contient 2 500 litres de moins que la première ;
- la cinquième cuve contient 1 600 litres de moins que la troisième ;

calculer le volume de chaque cuve.

Corrigé de l'exercice :

1 m^3 = 1 000 litres donc 191,4 m^3 = 191 400 litres.
La part de référence est le 1/3 du volume de la $2^{ème}$ cuve.
Traduction graphique de l'énoncé :

V. $1^{ère}$ cuve |___|___|___|___|___|___|
V. $2^{ème}$ cuve |___|___|___|
V. $3^{ème}$ cuve |___|___|___|___|___|
V. $4^{ème}$ cuve |_________________|-2500|
V. $5^{ème}$ cuve |_____________|-1600|

} 191 400 litres

- Le volume de la 1ère cuve représente 6 parts de référence, celui de la $2^{ème}$ cuve, 3 parts, celui de la $3^{ème}$, 5 parts.
- En ajoutant 2 500 litres au volume contenu par la $4^{ème}$ cuve on aura 6 parts de référence.
- En ajoutant 1 600 litres au volume contenu par la $5^{ème}$ cuve on aura 5 parts de référence.

Au total il y a donc : (6 + 3 + 5 + 6 + 5) = 25 parts de référence
pour 191 400 litres + 2 500 litres + 1 600 litres = 195 500 litres.

La part de référence représente : 195 500 / 25 = 7 820 litres.

- Le volume de la 1ère cuve est	7 820 x 6	=	46 920 litres
- Le volume de la 2ème cuve est	7 820 x 3	=	23 460 litres
- Le volume de la 3ème cuve est	7 820 x 5	=	39 100 litres
- Le volume de la 4ème cuve est	46 920 – 2 500	=	44 420 litres
- Le volume de la 5ème cuve est	39 100 – 1 600	=	37 500 litres

Vérification : 46 920 + 23 460 + 39 100 + 44 420 + 37 500 = 191 400.

2ème méthode : **méthode algébrique**

- Soit X le volume de la 2ème cuve.
- Le volume de la 1ère cuve : $2 \times X$
- Le volume de la 3ème cuve : $\frac{5}{3} \times X$
- Le volume de la 4ème cuve : $(2 \times X) - 2\,500$
- Le volume de la 5ème cuve : $(\frac{5}{3} \times X) - 1600$
- Le volume total des cuves est égal à :

$(2 \times X) + X + (\frac{5}{3} \times X) + (2 \times X) - 2\,500 + (\frac{5}{3} \times X) - 1600 = \frac{25}{3} X - 4\,100 = 191\,400$ litres

D'où : $\frac{25}{3} X = 195\,500$; $X = \frac{195\,500 \times 3}{25} = 23\,460$

Conclusion : Part pour la 2ème cuve = 23 460 l ; Part pour la 1ère cuve = $2 \times 23\,460 = 46\,920$ l
Part pour la 3ème cuve = $\frac{5}{3} \times 23\,460 = 39\,100$ l ; Part pour la 4ème cuve = 46 920 – 2500 = 44 420 l ; Part pour la 5ème cuve = 39 100 – 1 600 = 37 500 l .
On vérifie bien que : 46 920 + 23 460 + 39 100 + 44 420 + 37 500 = 191 400.

<u>Exercice H1 :</u>

Cinq étudiants A, B, C, D, E participent à un cross. La somme des temps mis par les 5 concurrents est de 1 h 55 mn 09 s.

- Le concurrent B a mis 24 s de plus que le concurrent A.
- Le concurrent C a mis 12/11ème du temps du concurrent A, moins 27 s.
- Le concurrent D a mis 8 s de plus que le concurrent B.
- Le concurrent E a mis 13/11ème du temps du concurrent A, moins 1 mn 20 s.

1- Quel est le temps mis par chaque étudiant, en minutes-secondes ?
2- Quel est leur classement ?

<u>Voir « CORRIGE-H1 »</u>

<u>Exercice H2 :</u>

En 1983, on estimait à 1 834 M (millions) d'habitants la population globale des six pays suivants : Brésil, URSS, Japon, USA, France et Chine.

- La population du Brésil est de 12 M supérieure à celle du Japon.
- Celle de l'URSS est de 10 M supérieure au double de celle du Brésil.
- Si on ajoute 4 M à la population des USA, elle est le double de celle du Japon
- En ajoutant 22 M à celle de la Chine on trouve 19 fois la population de la France.

- Le double de la population française est de 9 millions inférieur à celle du Japon.

1- Quelle est la part de référence ? Calculer sa valeur ?
2- En déduire la population de chaque pays.

Voir « CORRIGE-H2 »

Exercice H3 :

Cinq groupes d'étudiants participent à un cross. Les 50 premiers reçoivent une médaille.

1. Combien d'étudiants par groupe reçoivent une récompense, sachant que :
   - le 4ème groupe a une récompense de moins que le double du 5ème
   - le 2ème groupe en a les 2/3 du 3ème
   - le 5ème groupe en a les 3/4 du 2ème
   - le 1er groupe en a 3 de moins que le double du 2ème ?
2. Le classement par groupe s'effectue en additionnant les places des 10 premiers de chaque groupe ?
   - le 5ème groupe a 24 points de plus que 6/5 des points du 4ème
   - le 3ème groupe a 2/3 des points du 5ème
   - le 1er groupe a 2/3 des points du 4ème plus 1/4 de ceux du 3ème
   - le 2ème groupe a 4/3 des points du 4ème moins 9.

Quel est le classement des groupes au cross, sachant que la somme des points est égale à 1 283 ?

Voir « CORRIGE-H3 »

Exercice H4 :

Cinq représentants de commerce (VRP) A, B, C, D, E, partent en voyage par le même train.

- Le VRP A parcourt 54 km de plus que le double du VRP C.
- Le VRP D parcourt 20 km de plus que le tiers du parcours du VRP A.
- Le VRP B parcourt 104 km de moins que les 2/3 du VRP A.
- Le VRP E parcourt 45 km de moins que le VRP C.

1. Sachant que le total des kilomètres parcourus par les 5 VRP est de 2 589 km, calculer les distances parcourues par chacun d'eux.
2. Les 2 589 km sont parcourus à la vitesse moyenne de 90 km/h. Quel est le temps global mis (en heures-minutes-secondes) pour effectuer les 2 589 km ?
3. Le VRP D met 42 mn de plus que la moitié du temps du VRP B. Le VRP A met 40 mn de moins que le triple du temps du VRP D. Le VRP C met 2 h 25 mn de moins que la somme des temps des VRP D et E. Et le VRP E met 1 h 41 mn de moins que le VRP B. Sachant que le train a quitté la gare de départ à 18 h 00 mn, à quelle heure chaque VRP arrive-t-il à destination ?

Voir « CORRIGE-H4 »

Activité H5 : ***somme ou différence des parts connues, une part est fonction de l'autre C'est le cas le plus général, on utilisera la méthode algébrique.***

Deux capitaux sont placés à intérêts simples pendant 4 ans :

- le premier à 8%
- le second à 11%

Le second capital a rapporté 320 € de plus que le premier, mais est inférieur de 2 000 € au premier.
Trouver les deux capitaux.

On rappelle les notions suivantes sur les intérêts :
Un capital C_0 *est une somme placée ou prêtée, son loyer est appelé intérêt* ***I****. Dans le cas simple, l'intérêt* ***I*** *est calculé à partir du taux d'intérêt* ***i*** *propre à l'opération financière et à la durée du placement ou du prêt* ***d*** *exprimée en année :* $\mathbf{I = C_0 \times i \times d}$

Corrigé de l'activité :

- Soient $(C_0)_1$ le 1er capital placé, I_1 son intérêt calculé à partir du taux i_1
- Soient $(C_0)_2$ le 2nd capital placé, I_2 son intérêt calculé à partir du taux i_2
- Relation entre les intérêts : $I_2 = I_1 + 320$ €
- Relation entre les capitaux : $(C_0)_2 = (C_0)_1 - 2\,000$ €
- Ecriture d'un système de deux équations à deux inconnues :

$$\begin{cases} (C_0)_2 \times i_2 \times d = (C_0)_1 \times i_1 \times d + 320 \\ (C_0)_2 = (C_0)_1 - 2\,000 \end{cases}$$

avec $d = 4$; $i_1 = 8\%$; $i_2 = 11\%$. D'où : $\begin{cases} (C_0)_2 \times 0{,}44 = (C_0)_1 \times 0{,}32 + 320 \\ (C_0)_2 = (C_0)_1 - 2\,000 \end{cases}$

- Ecriture d'une part en fonction de l'autre : $\begin{cases} (C_0)_2 = \dfrac{(C_0)_1 \times 0{,}32 + 320}{0{,}44} \\ (C_0)_2 = (C_0)_1 - 2\,000 \end{cases}$

- D'où : $(C_0)_1 - 2\,000 = \dfrac{(C_0)_1 \times 0{,}32 + 320}{0{,}44}$ et $(C_0)_1 \times 0{,}44 - (C_0)_1 \times 0{,}32 = 320 + 2\,000 \times 0{,}44$

  On obtient : $(C_0)_1 \times 0{,}12 = 320 + 880 = 1200$ et donc : $(C_0)_1 = \dfrac{1\,200}{0{,}12} = 10\,000$

Conclusion : Le premier capital $(C_0)_1 = 10\,000$ € ;
Le second capital $(C_0)_2 = 10\,000 - 2\,000 = 8\,000$ € .
On vérifie bien que : $8\,000 \times 0{,}44 = 10\,000 \times 0{,}32 + 320$.

Exercice H5 :

Deux capitaux sont placés à intérêts simples pendant 7 ans :

- le premier à 9%
- le second à 7%

Le second capital a rapporté 364 € de moins que le premier, mais est supérieur de 1 200 € au premier.
Trouver les deux capitaux.

Voir « CORRIGE-H5 »

MAÎTRISE DES BASES DE MATHÉMATIQUES

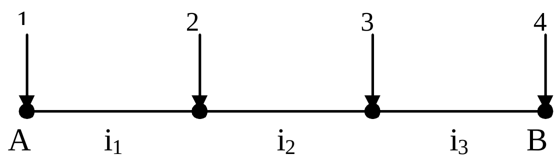
SÉANCE N° 4

INTERVALLES - SURFACES - VOLUMES RAPPELS DES NOTIONS DE BASE

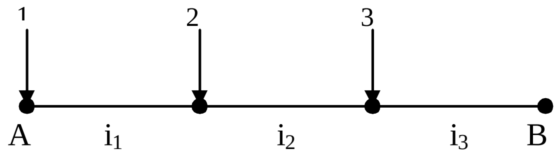
Ces notions sont définies dans le sens le plus général. L'intervalle, c'est l'espace entre deux corps, la distance d'un point à un autre, l'espace temps entre deux instants, deux périodes. La surface, c'est la partie extérieure d'un corps, l'ensemble des points délimités par une courbe fermée, et c'est aussi sa mesure appelée encore aire. Le volume, c'est la partie de l'espace qu'occupe un corps et c'est aussi la quantité qui la mesure.

- I - LES INTERVALLES

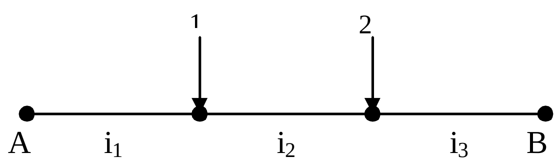
A RETENIR



S'il y a une flèche à chaque extrémité du segment AB, on compte une flèche **de plus** que d'intervalles.

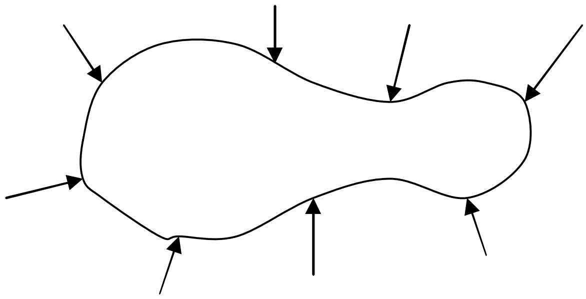


S'il y a une flèche à une extrémité seulement du segment AB, on compte **autant** de flèches que d'intervalles.

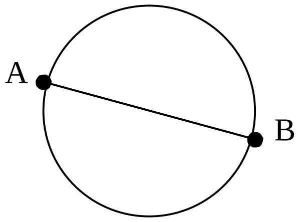


Si les extrémités du segment AB n'ont pas de flèches, il y a une flèche **de moins** que d'intervalles.

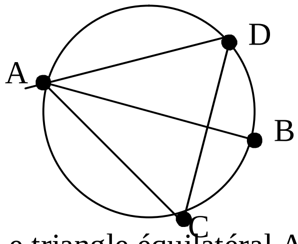
A RETENIR



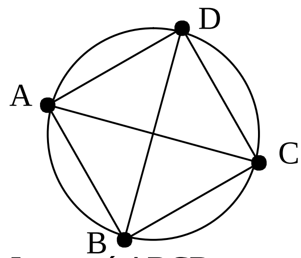
Sur une ligne fermée, il y a autant d’intervalles que de points de division.



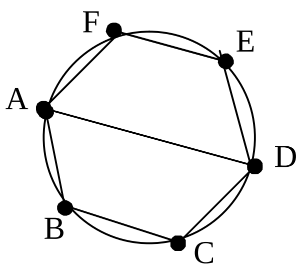
Tout diamètre d’un cercle divise la circonférence en deux parties égales



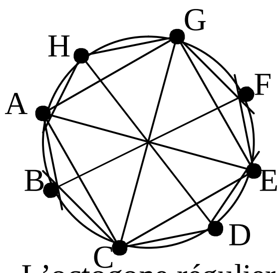
Le triangle équilatéral ACD partage la circonférence en trois parties égales



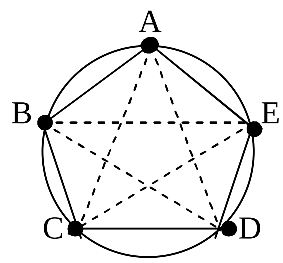
Le carré ABCD partage la circonférence en quatre parties égales



L’hexagone régulier ABCDEF partage la circonférence en six parties égales



L’octogone régulier ABCDEFGH partage la circonférence en huit parties égales



Le pentagone étoilé ABCDE partage la circonférence en cinq parties

<u>Activité I1</u> :

Un centre hippique veut aménager un pré de forme ronde pour y faire paître ses chevaux. Pour cela il décide, dans un premier temps, de l’entourer d’une clôture. D’abord on fait installer 8 poteaux en ciment autour du pré à égale distance les uns des autres.

1- Quelle sera la distance entre chaque poteau, sachant que le pré a un diamètre de 140 m ?
   Arrondissez le résultat au mètre sans chiffre après la virgule.

Dans l’intervalle entre chaque poteau, sont implantés des piquets de bois pour tenir la clôture. Chaque piquet est espacé de 1,5 m. En outre, entre un poteau et un piquet, il est laissé 2 m.

2- Quel est le nombre de piquets qui vont être disposés entre 2 poteaux ?
3- Quel est le nombre total de piquets nécessaires à la clôture du pré, sachant qu’il y aura 2 barrières d’accès à celui-ci, de longueur respective 3 m et 4,5 m ?

Corrigé de l'activité :

1- *Calcul de la circonférence du pré* : C

$C = 2\pi R$ *avec* $R = \frac{140}{2} = 70\,\text{m}$ donc $C = 2\pi R = 2\pi \times 70 \approx 440$ m

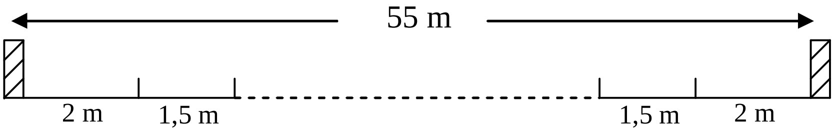
Calcul de la distance séparant deux poteaux : D_P

Sur une ligne fermée (le cercle C), il y a autant d'intervalles que de points de division.

Avec 8 poteaux, on obtient donc 8 intervalles, sur le contour du pré, et $D_P = \frac{440}{8} = 55\,\text{m}$

2- *Calcul du nombre de piquets disposés entre chaque poteau* : N_P

A chaque extrémité de l'intervalle délimité par 2 poteaux, on enlève 2 m. On obtient le schéma suivant :



Il reste donc un arc de : 55 - 2 - 2 = 51 m sur lequel sont disposés des piquets tous les 1,5 m. On obtient dans cet arc, 51 ÷1,5 = 34 intervalles.

Puisqu'il y a 1 piquet à chaque extrémité des 51 m, il y aura donc 1 piquet de plus que d'intervalles. $N_P = 34 + 1 = 35$ piquets entre 2 poteaux.

3- *Calcul du nombre total de piquets* : N

- Le nombre de piquets utiles N_u, sans tenir compte des 2 barrières, est :

$N_u = N_P \times 8 = 35 \times 8 = 280$ piquets

- Le nombre de piquets à supprimer N_s, pour créer des barrières.

Pour créer une barrière de 3 m, il suffit de supprimer un piquet distinct de ceux les plus proches des poteaux. En effet, un piquet sépare deux intervalles de 1,5 m et $2 \times 1,5 = 3$ m.

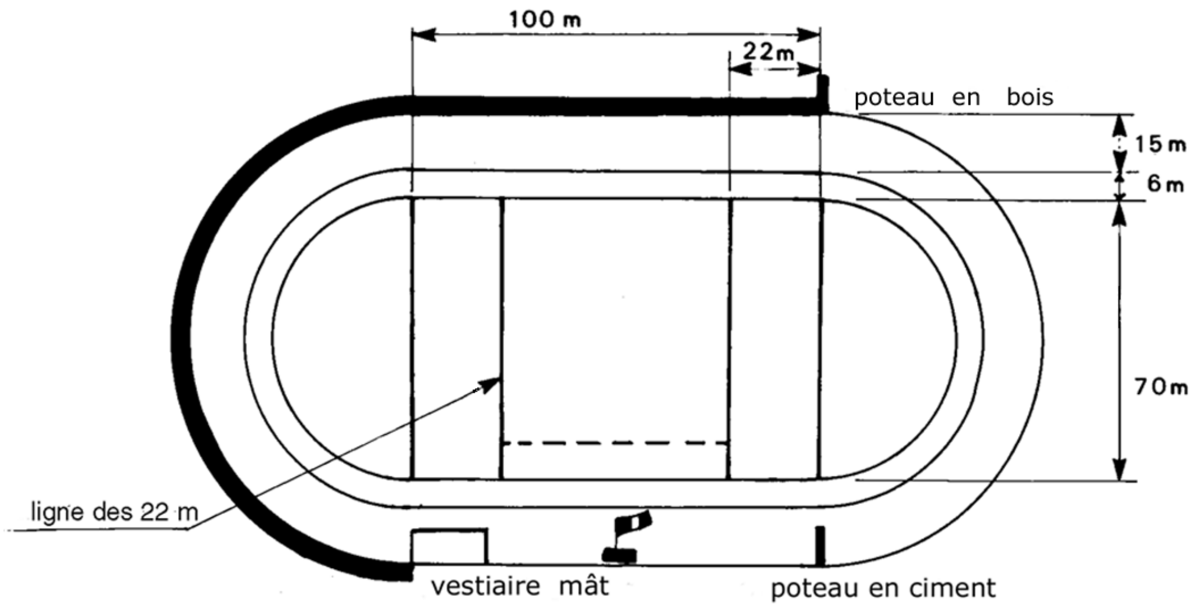
Pour créer une barrière de 4,5 m, il suffit de supprimer deux piquets consécutifs distincts de ceux les plus proches des poteaux. En effet, en libérant deux intervalles on a : $3 \times 1,5 = 4,5$ m.

Par conséquent : $N_s = 1 + 2 = 3$ et $N = N_u - N_s = 280 - 3 = 277$ piquets

<u>Exercice corrigé</u> :

Le terrain de sport d'une commune a la forme et les dimensions indiquées sur le croquis.

Sur la ligne marquée d'un gros trait noir sont plantés des pins. Les arbres extrêmes sont : l'un à 2 m du vestiaire, l'autre à 1,75 m du poteau en bois. L'intervalle entre deux pins est de 2,75 m.

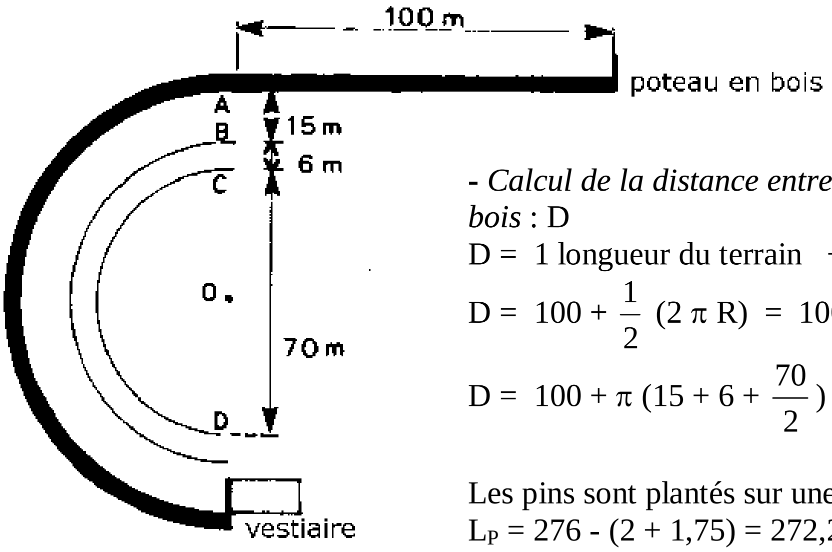


1- Quel est le nombre de pins ?

La demi-circonférence entre le poteau en bois et le poteau en ciment doit être grillagée. Le grillage dont les extrémités sont fixées aux poteaux est maintenu par 54 piquets.
2- Quel est la longueur de l'intervalle entre 2 piquets ?

Vous êtes chargé de marquer à la chaux l'emplacement de 4 équipes de 15 joueurs, qui se présenteront sur une ligne face au mât des couleurs (ligne en pointillés). Les joueurs placés aux extrémités doivent être sur les lignes des 22 m et l'espace entre joueurs d'une même équipe est de 0,85 m.
3- Quel sera l'intervalle entre 2 équipes consécutives ? (Ne pas tenir compte de la place occupée par chaque joueur).

Corrigé de l'exercice :
1- *Calcul du nombre de pins* :



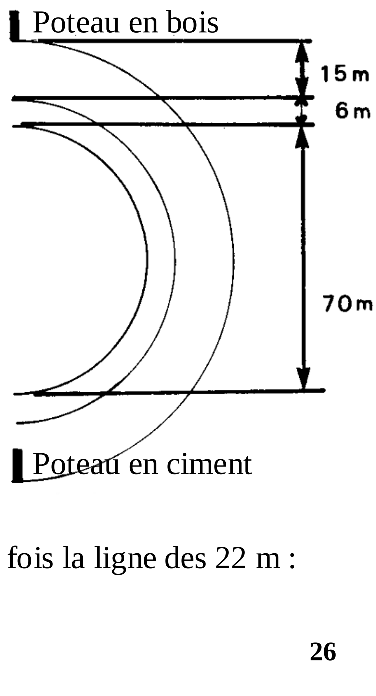
- *Calcul de la distance entre le vestiaire et le poteau en bois* : D
D = 1 longueur du terrain + 1/2 circonférence

$D = 100 + \frac{1}{2}(2\pi R) = 100 + \pi R$

$D = 100 + \pi (15 + 6 + \frac{70}{2}) = 100 + 56\pi \approx 276$ m

Les pins sont plantés sur une longueur L_P de :
$L_P = 276 - (2 + 1{,}75) = 272{,}25$ m

Le nombre d'intervalles N_i est : $N_i = L_P \div$ (intervalle entre 2 pins) $= 272{,}25 \div 2{,}75 = 99$
Il y a un pin à chaque extrémité donc, il y a un pin de plus que d'intervalles.
Le nombre de pins est donc égal à : 100.



2- *Calcul de la longueur de l'intervalle* L_i *entre 2 piquets*
- *Calcul de la longueur du grillage* (L_g)

$L_g = \frac{1}{2}(2\pi R) = \pi R = 56\pi \approx 176$ m

- Il n'y a pas de piquets aux extrémités, donc il y a un intervalle de plus que de piquets. Soit : 54 + 1 = 55 intervalles.

$L_i = \frac{L_g}{55} = \frac{176}{55} = 3{,}2\text{ m}$

3- *Calcul de la longueur de l'intervalle entre 2 équipes* :
- La <u>longueur occupée</u> est égale à la longueur du terrain moins deux fois la ligne des 22 m :
$100 - 2 \times 22 = 56$ m

- La *__longueur d'une équipe__* est égale à : $0{,}85 \times \mathbf{14} = 11{,}90$ m. En effet, dans une équipe (à 15 joueurs) il y a 1 joueur à chaque extrémité donc il y a un intervalle de moins.
- La *__longueur des équipes__* est égale à quatre fois la longueur d'une équipe, soit : $4 \times 11{,}90 = 47{,}60$ m
- Il y a quatre équipes et une à chaque extrémité. Donc il y a 3 intervalles qui mesurent au total : Longueur occupée - Longueur des équipes = 56 - 47,60 = 8,40 m
- La longueur d'un intervalle entre deux équipes mesure : $L = \dfrac{8{,}40}{3} = 2{,}80\,\text{m}$

__Exercice I1 :__
Un terrain agricole a la forme d'un rectangle. Si on additionne sa longueur, sa largeur et la différence entre ces 2 mesures, on trouve 220 m.
1- Quelle est, en mètre, la longueur du terrain ?
2- On entoure ce terrain d'une clôture et on plante sur les côtés un piquet tous les 5 m. Sachant qu'on a planté 58 piquets, quelle est la largeur du terrain ?
3- Pour des raisons de stabilité, on décide de mettre un piquet tous les 250 cm sur les longueurs, et un piquet tous les 125 cm sur les largeurs. Combien de piquets supplémentaires faudra-t-il ?

__Voir « CORRIGE-I1 »__

__Exercice I2 :__
La signalisation au sol est composée de :
- lignes discontinues composées de tirets de 3 m de long espacés de 10 m (voie à grande visibilité)
- pointillés de 1 m de long espacés de 2,25 m (précédant toujours une ligne continue).
- ligne continue (voie sans visibilité).

1- Un conducteur roule sur une route à grande visibilité pendant 2,005 km. Combien croise-t-il, au maximum, de lignes discontinues ?
2- Puis il croise 30 pointillés avant d'arriver à une ligne continue. Quelle distance sépare la fin du dernier tiret de la ligne discontinue du début de la ligne continue sachant que les espaces séparant deux types de voies sont de 2,25 m.
Une machine doit refaire les marques sur une portion de chaussée de 5 km. Sur ces 5 km il y a :
- 2,46 km de ligne discontinue (du début du 1er tiret à la fin du dernier tiret).
- 337 m séparent la fin du dernier tiret de la ligne discontinue du début de la ligne continue.
- La largeur des marques est de 15 cm.

Le réservoir de la machine, vide au départ, a une contenance de 30 litres. Sachant qu'il faut 1 litre pour faire 10 m², combien de fois le réservoir doit-il être rempli ?

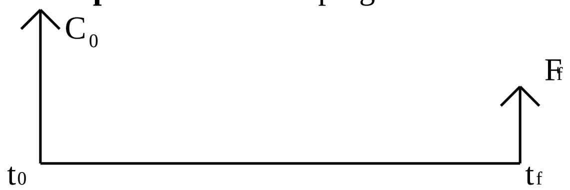
__Voir « CORRIGE-I2 »__

__Exercice corrigé__ :
Une personne place un capital de 18 000 **€** à intérêts simples, du 18 avril au 20 septembre. On lui rémunère son placement à un taux annuel de 12%.
1) Calculer directement le montant des intérêts acquis et en déduire la valeur acquise par le capital le 20 septembre. On note que l'année monétaire est à 360 jours.
2) En admettant que pour le même montant d'intérêt trouvé dans la question précédente, le placement se soit en fait arrêté le 1er septembre, calculez le taux d'intérêt dans cette situation.
3) Cette personne désire également savoir pendant combien de jours elle aurait dû placer son capital pour que cela lui rapporte un intérêt de 1 200 **€**.

Corrigé de l'exercice :

1) On a le diagramme des flux suivant :

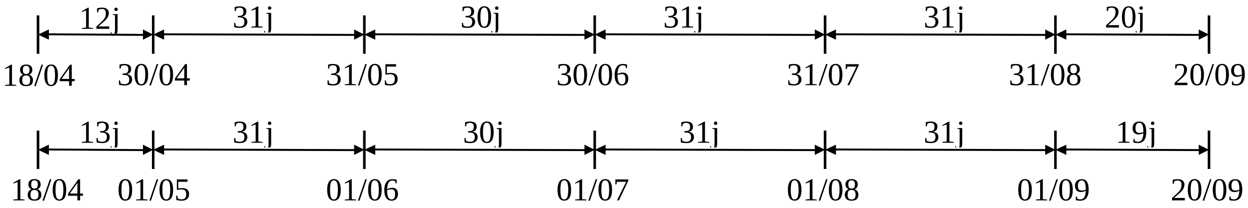
point de vue : l'épargnant



$C_0 = 18\,000$ € ; $i = 12\%$
$t_0 = 18$ avril ; $t_f = 20$ septembre
Les intérêts : $F_f = C_0 \times i \times (t_f - t_0)_{an}$
La valeur acquise : $C_f = C_0 + F_f$
$C_f = C_0\,(1 + i\,(t_f - t_0)_{an})$

Le nombre de jours entre le 20 septembre et le 18 avril est égal à 155 jours (12+31+30+31+31+20=155).

Remarque : pour compter le nombre de jours entre t_0=18 avril et t_f =20 septembre, on peut utiliser un des deux schémas ci-dessous :



Le montant des intérêts acquis est égal à : $F_f = 18000 \times 0{,}12 \times \dfrac{155}{360} = 930$ euros

La valeur acquise est égale à : $C_f = 18\,000 \times \left(1 + 0{,}12 \times \dfrac{155}{360}\right) = 18\,930$ euros

On retrouve ce résultat en remarquant que : $F_f = C_f - C_0$.

2) Entre le 18 avril et le 1er septembre il y a 136 jours. On écrit donc que : $18930 = 18000\left(1 + i \times \dfrac{136}{360}\right)$ donc i=0,1367=13,67%

3) On écrit que : $1200 = 18000 \times 0{,}12 \times \dfrac{j}{360}$ donc j = 200 jours.

Du 18 avril au 20 septembre il y a 155 jours. Du 20 septembre au 30 septembre il y a 10 jours. Du 30 septembre au 31 octobre, il y a 31 jours. Par conséquent, du 18 avril au 31 octobre , on a : 155 + 10 + 31 = 196 jours. Pour un placement d'une durée de 200 jours, l'échéance pour des intérêts à 1 200 € est donc le 4 novembre.

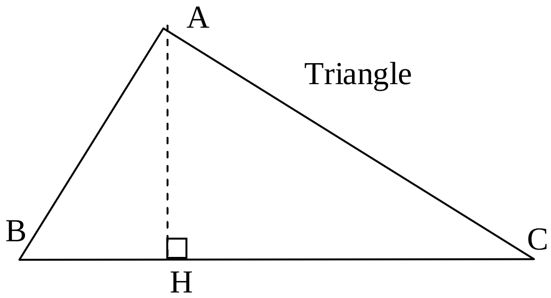
<u>Exercice I3 :</u>

Le 19 décembre 1999, François achète 10 caisses de vin à son fournisseur habituel Marie, contre une traite (ou lettre de change) de 8 000 F à payer pour le 1er avril de l'année suivante. Le 21 décembre, Marie l'escompte (c-à-d elle vend la traite) auprès de son banquier au taux de 8,6%. Représenter le diagramme des flux avec le point de vue du banquier. Calculer l'escompte (c-à-d l'intérêt retenu par le banquier).

<u>Voir « CORRIGE-I3 »</u>

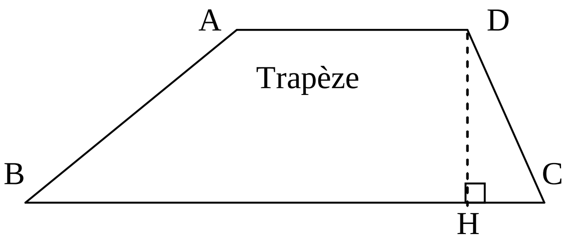
- J - LES SURFACES

A RETENIR



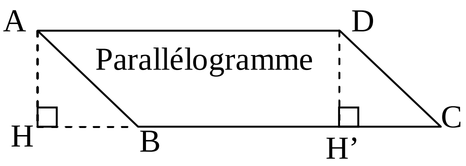
BC = b
AH = h

$$S = \frac{b \times h}{2}$$



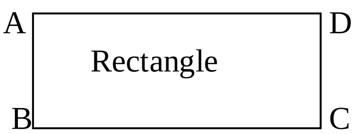
BC = B
AD = b
DH = h

$$S = \frac{(B + b) \times h}{2}$$



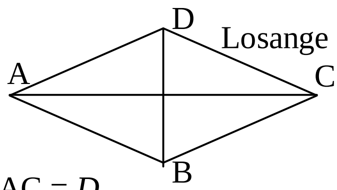
AD = BC = b
AH = DH' = h

$$S = b \times h$$



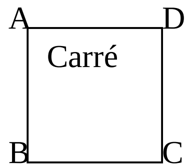
AD = BC = L
AB = DC = l

$$S = L \times l$$



AC = D
DB = d

$$S = \frac{d \times D}{2}$$



AB = BC = CD = AD = a

$$S = a \times a = a^2$$

<u>Exercice J1 :</u>

La loi Carrez (N °96.1107 du 18 décembre 1996) a pour but d'améliorer la protection des acquéreurs de lots de copropriété.

Le décret n ° 97.532 du 23 mai 1997 définit la superficie privative d'un lot de copropriété.

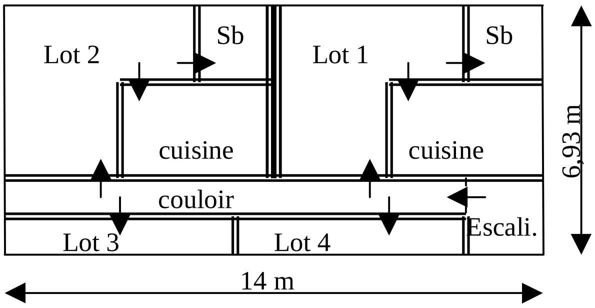
Ci-dessous, des extraits de ce décret pour le calcul de la superficie dans le cadre de la loi Carrez.

Art.4-1. - La superficie de la partie privative d'un lot ou d'une fraction de lot, mentionnée à l'article 46 de la loi du 10 juillet 1965, est la superficie des planchers des locaux clos et couverts après déduction des surfaces occupées par les murs, cloisons, marches et cages d'escalier, gaines, embrasures de portes et de fenêtres. Il n'est pas tenu compte des planchers des parties des locaux d'une hauteur inférieure à 1,80 mètre.

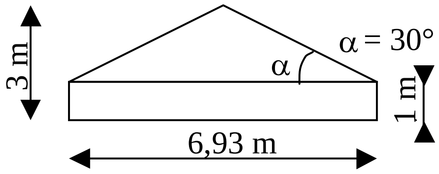
Art.4-2. . Les lots ou fractions de lots d'une superficie inférieure à 8 mètres carrés ne sont pas pris en compte pour le calcul de la superficie mentionnée à l'article 4-1.

Un marchand de biens transforme un grenier en deux studios : (Lot 1 + Lot 4) et (Lot 2 + Lot 3).
Quelle est la superficie totale des parties privatives dans le cadre de la loi Carrez ?
Ci-dessous les plans des subdivisions en lots.

Plan de dessus



Plan de côté

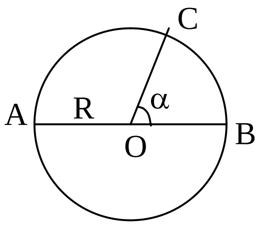


Cloison de 10 cm
Mur porteur de 20 cm
Cuisine : 2,53 m × 4 m ;
Salle de bain : Sb = 2 m × 2 m

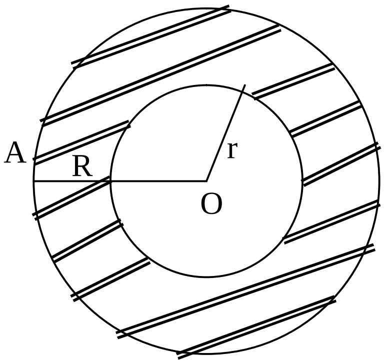
Escalier : 2,2 m × 1,8 m ; Couloir : 0,8 m × 12,2 m
Lot 3 = Lot 4 = 1,3 m × 6 m = Débarras ; Lot 1 et Lot 2 mêmes mensurations.

<u>Voir « CORRIGE-J1 »</u>

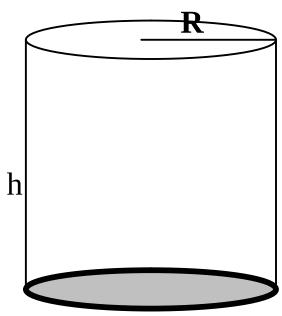
A RETENIR



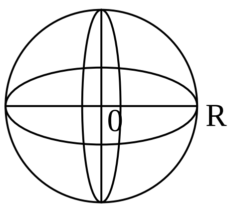
- longueur de la ***circonférence*** du cercle : $C = 2 \times \pi \times R$
- ***surface du disque*** : $S = \pi \times R^2$
- ***longueur de l'arc*** : $\overset{\frown}{BC} = R \times \alpha$ (α en radians)
- ***surface du secteur*** (OB,OC) = $\dfrac{\alpha \times R^2}{2}$ (α en radians)



- l'aire de la couronne (partie hachurée) :
$$S = \pi \times R^2 - \pi \times r^2 = \pi \times (R^2 - r^2)$$

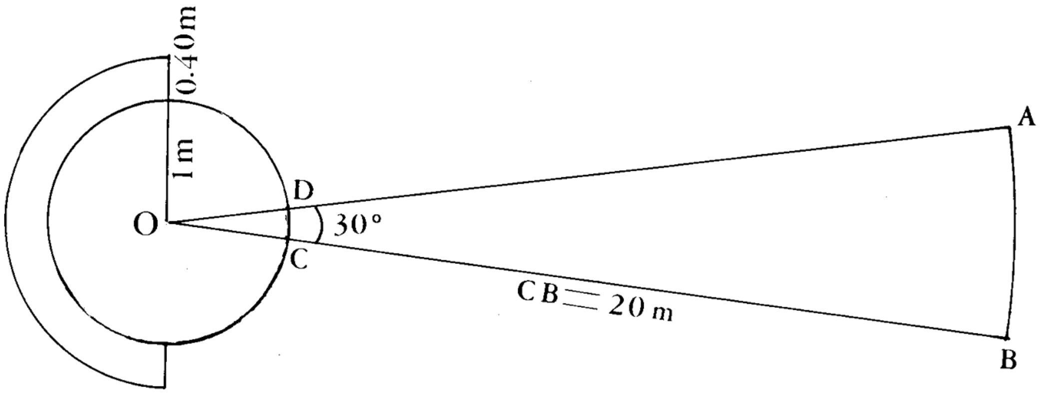


- la ***surface du cylindre***
$$S = \pi \mathbf{R}^2 + 2 \pi \mathbf{R} \times h + \pi \mathbf{R}^2$$
$$\boxed{S = 2 \pi \mathbf{R} (\mathbf{R} + h)}$$



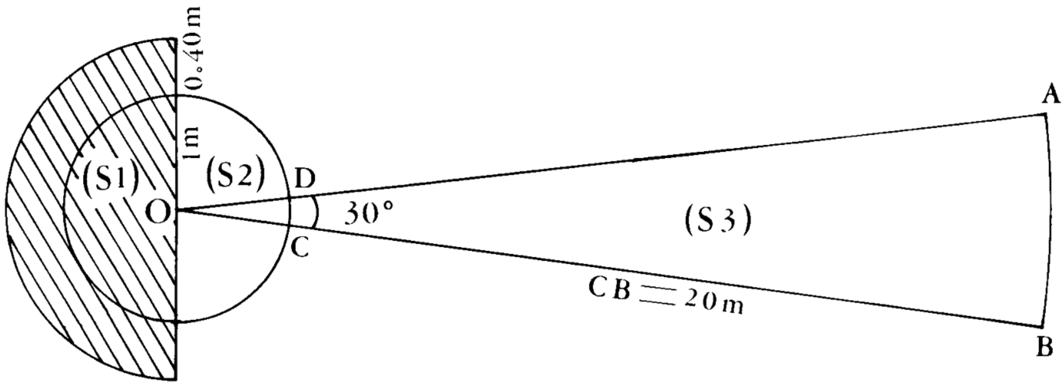
- la ***surface de la sphère***
$$\boxed{S = 4 \pi \mathbf{R}^2}$$

<u>Exercice corrigé</u> :
Un terrain de lancer de poids a les dimensions suivantes :



Calculez la surface totale de ce terrain.

Corrigé de l'exercice :
Le croquis ci-dessous a pour but de décomposer le problème en 3 parties :



- *Calcul de la surface* S1 : La surface du demi-cercle est $S1 = \frac{\pi R^2}{2} = \frac{\pi 1{,}4^2}{2} \approx 3{,}08\ m^2$

- *Calcul de la surface* S2 : La surface du demi-cercle est $S2 = \frac{\pi R^2}{2} = \frac{\pi 1^2}{2} \approx 1{,}57\ m^2$

- *Calcul de la surface* S3 : La surface de la portion ABCD est égale à la surface du secteur AOB diminuée de celle du secteur OCD. S3 = AOB – OCD.

$S(AOB) = \frac{\alpha R^2}{2} = \frac{30 \times \pi}{180} \times \frac{21^2}{2} \approx 115{,}45\ m^2$; $S(OCD) = \frac{\alpha r^2}{2} = \frac{30 \times \pi}{180} \times \frac{1^2}{2} \approx 0{,}26\ m^2$

D'où : S3 = S(AOB) – S(OCD) = 115,45 – 0,26 = 115,19 m²

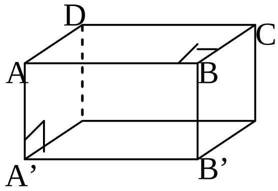
- *Calcul de la surface* totale S : La surface totale du terrain est égale à la somme des surfaces élémentaires. S = S1 + S2 + S3 = 3,08 + 1,57 + 115,19 = 119,84 m².

<u>Exercice J2 :</u>
Un bassin circulaire est entouré d'une pelouse circulaire de 7 m de large.
Le tour extérieur de cette pelouse mesure 75,36 m.
Calculez la superficie de la pelouse ?

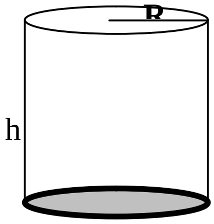
<u>Voir « CORRIGE-J2 »</u>

- K - LES VOLUMES

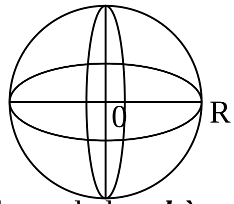
A RETENIR



- ***Parallélépipède rectangle*** :
AB = L ; BC = l ; AA’ = h
$\boxed{V = L \times l \times h}$
Pour un cube : L = l = h = a : $V = a^3$

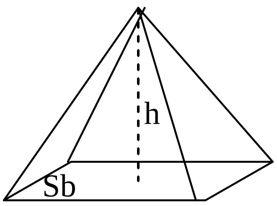


- Volume du ***cylindre*** :
$\boxed{V = \pi \mathbf{R}^2 \times h}$

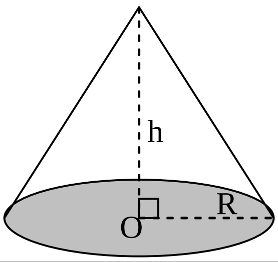


Volume de la ***sphère*** :
$\boxed{V = \frac{4}{3} \pi \mathbf{R}^3}$

A RETENIR



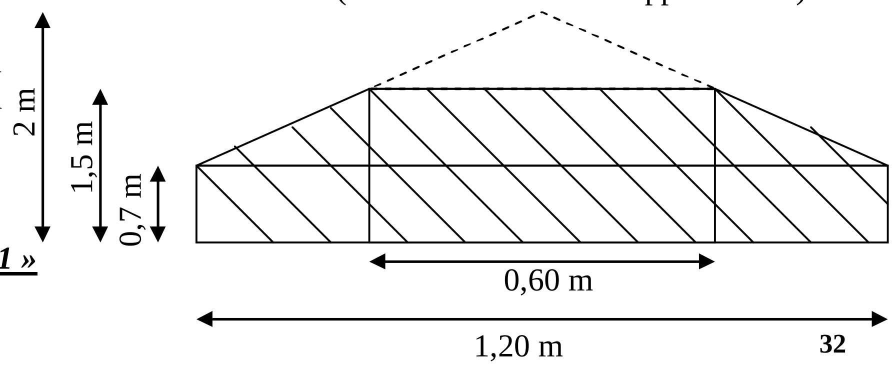
- ***Pyramide*** :
La base Sb est un polygone , la hauteur h de la pyramide est la perpendiculaire abaissée du sommet à la base.
$\boxed{V = \frac{Sb \times h}{3}}$



- ***Cône*** :
La base est un disque et l’axe du cône est perpendiculaire au disque.
$\boxed{V = \frac{1}{3} \pi \mathbf{R}^2 \times h}$

<u>**Exercice K1 :**</u>
On décide d’installer un monument commémoratif sur une place. Le socle de ce monument est constitué d’un cylindre et d’un trône de cône de béton (ci-dessous un schéma approximatif).

Calculez le volume de béton nécessaire à la réalisation du socle.



<u>Voir « CORRIGE-K1 »</u>

MAÎTRISE DES BASES DE MATHÉMATIQUES

SÉANCE N° 5

- L - CONTRÔLE N°1

Exercice L1 : Problème de fraction ***(4 points)***
Les salariés d'un centre commercial se divisent en 3 catégories.
La 1ère catégorie C1, les administratifs chargés en outre de la logistique, représente les 2/5 de l'effectif du centre commercial.
La 2ème catégorie C2, les vendeurs, représente le 1/3 de l'effectif du centre commercial.
La 3ème catégorie C3, les caissiers et caissières, est composée d'un personnel à mi-temps pour la plupart.

1- Quelle est, sous forme de fraction, l'effectif de la 3ème catégorie ?
2- Sachant que l'effectif de la 1ère catégorie est de 36 personnes, quel est l'effectif des autres catégories ?
3- A la suite d'une épidémie de grippe, 6 personnes de la 1ère catégorie sont indisponibles. Quelle fraction de la catégorie représentent-elles ?
4- Au niveau du centre commercial, 1/5 de son effectif est indisponible dont 5/9 sont dans la 2ème catégorie. Combien reste-t-il de personnes disponibles dans les 2ème et 3ème catégories ?

(barème : 1 : 1 point ; 2 : 1 point ; 3 : 0,25 point ; 4 : 1,75 points)

Exercice L2 : Problème de transport ***(4 points)***
Dans le cadre d'un exercice de soutien logistique, 3 camions de type transport « haute dangerosité », partant du même endroit, doivent rejoindre une même destination par 3 itinéraires différents. Sur la carte, le premier itinéraire mesure 66 cm, le second 55 cm et le troisième 48 cm.

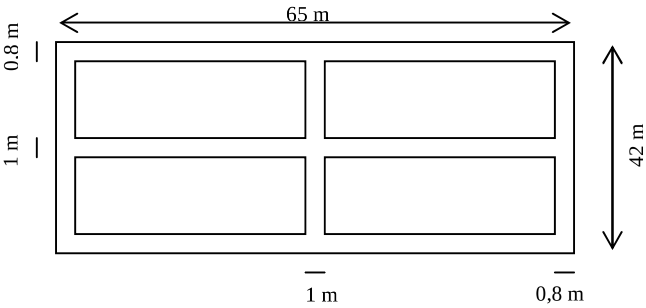
1- Sachant que le 3ème camion doit parcourir 96 km, quelle est l'échelle de la carte et quelles distances réelles doivent parcourir les 2 premiers camions ?
2- Un des camions, parti à 7 h 53 mn et roulant à 48 km/h, tombe en panne à 9 h 03 mn. Quelle distance aura-t-il parcouru ?

Le dépanneur part du même point de départ avec un camion à 9 h 24 mn et se dirige vers le camion en panne à la vitesse de 70 km/h. Il faut 17 mn pour atteler les deux camions.

3- A quelle heure l'attelage rejoindra-t-il le point de départ sachant qu'il roule à 30 km/h sur le trajet du retour ?

(barème : 1 : 1,5 points ; 2 : 1 point ; 3 : 1,5 points)

Exercice L3 : Calcul de surface ***(3 points)***



Un jardin rectangulaire mesure 65 m sur 42 m. On établit tout autour, le long des murs, une allée de 0,8 m de large ; puis on partage le reste en quatre parties rectangulaires égales par deux allées de 1 m de large perpendiculaires entre elles.
Quelle surface reste-t-il à cultiver ?

Exercice L4 : Problème d'intervalle ***(3 points)***
Un sous-traitant d'EDF installe une ligne électrique à 2 fils entre deux villages distants de 10,65 km.
Le fil a coûté 6 **€** la bobine de 150 m.
Tous les 25 m il faut placer un poteau qui revient tout équipé à 7 **€**.
Sachant qu'il n'y a pas de poteau au départ ni à l'arrivée de la ligne, calculer la dépense en matériel.

Exercice L5 : Problème d'escompte commercial des effets de commerce ***(6 points)***
Deux effets de commerce (ou lettre de change ou traite) sont négociés entre un fournisseur et deux clients DURAND et DUPONT, le 4 novembre.

- Effet négocié avec DURAND : 1 200 **€** à échéance du 10 décembre
- Effet négocié avec DUPONT : 1 300 **€** à échéance du 28 décembre.

Le fournisseur désire escompter ces effets (c-à-d vendre les traites) auprès de son banquier le jour de la date de négociation.
Pour l'effet DURAND, le taux est négocié d'une façon avantageuse à 7%.
Pour l'effet DUPONT, le taux de négociation est noté τ.

1- Dans un premier temps, le fournisseur et le banquier décident d'appliquer à l'effet DUPONT un taux τ standard supérieur de 2% à celui de DURAND. Présenter le diagramme des flux avec le point de vue du banquier pour cette double opération. Calculer les encaissements, τ et les escomptes.
2- Dans un second temps, le fournisseur revient sur sa première réflexion et négocie pour supporter l'escompte de 24 **€** le jour de négociation. Quel est l'escompte pour DUPONT et calculer τ.
3- Dans un dernier temps, le fournisseur revient sur sa dernière réflexion et parvient à négocier avec le banquier, pour l'effet DUPONT, le même taux d'escompte que celui de DURAND et le même escompte que les années précédentes. Il propose de changer la date d'échéance de DUPONT afin de supporter la somme globale équivalente à 153 FRS le jour de négociation.
Quelle est la nouvelle date d'échéance pour DUPONT ?

(barème : 1 : 3 points ; 2 : 1 point ; 3 : 2 points)

MAÎTRISE DES BASES DE MATHÉMATIQUES

SÉANCE N° 6

- M - MOUVEMENT UNIFORME

RAPPEL SUR LES UNITES DE TEMPS

Correspondances

1 heure = 60 minutes (1 h = 60 mn)
1 minute = 60 secondes (1 mn = 60 s)
1 heure = 3 600 secondes (1 h = 3 600 s).

Opérations

3 h 47 mn 28 s + 5 h 19 mn 52 s = 8 h 66 mn 80 s = 9 h 7 mn 20 s
9 h 12 mn 15 s – 4 h 31 mn 30 s = 8 h 71 mn 75 s – 4 h 31 mn 30 s = 4 h 40 mn 45 s
(1 mn 17 s) × 24 = 24 mn 408 s = 30 mn 48 s
(4 h 15 mn 12 s) ÷ 6 = (255 mn 12 s) ÷ 6 = 42 mn 32 s.

A RETENIR : ***MOUVEMENT UNIFORME***

1- Un mobile est animé d'un ***mouvement uniforme*** si sa vitesse est constante.
2- La vitesse d'un mobile animé d'un mouvement uniforme est le rapport de la distance parcourue sur le temps correspondant mis pour la parcourir.
3- Si l'on appelle : **d**, la distance parcourue ; **t**, le temps du parcours ; **v**, la vitesse nous pouvons écrire : $\boxed{v = \frac{d}{t} \quad ou \quad d = vt \quad et \quad t = \frac{d}{v}}$
4- Les unités étant choisies judicieusement :

$\left.\begin{array}{l}\text{La distance d en mètres}\\ \text{Le temps t en secondes}\end{array}\right\}$ La vitesse sera exprimée en m/s

$\left.\begin{array}{l}\text{La distance d en kilomètres}\\ \text{Le temps t en heures}\end{array}\right\}$ La vitesse sera exprimée en km/h

Remarque : - La vitesse du son : 340 m/s
- La vitesse d'un avion supersonique : Mach 2,4 = 340 m/s × 2,4 = 816 m/s (Mach 1 = 1 fois la vitesse du son) c-à-d : Mach 2,4 = 2 937,6 km/h.

<u>**Activité M1**</u> : ***Calcul de la vitesse connaissant la distance et le temps***
Un véhicule part de Paris à 8 h 00 et arrive à Orléans à 10 h 13 mn 20 s. Quelle a été sa vitesse moyenne en km/h sachant que la distance Paris - Orléans est de 120 km ?

Corrigé de l'activité :
Temps de parcours : 10h 13mn 20 s – 8 h = 2 h 13 mn 20 s.
Calculer la vitesse en km/h, c'est déterminer le nombre de kilomètres parcourus en 1 heure (ou en 3 600 s), sachant que 120 km sont parcourus en 2 h 13 mn 20 s (ou en 8 000 s).
Règle de trois :
En 2 h 13 mn 20 s soit 8 000 s, la distance parcourue est 120 km,
en 1 s, la distance parcourue sera 8 000 fois plus faible,
en 1 h soit 3 600 s, la distance parcourue sera 3 600 fois plus grande
soit $d = \frac{120 \times 3600}{8000} km = 54 km$.
Cette distance étant parcourue en 1 heure, la vitesse est donc : v = 54 km/h.
∗ Autre méthode en utilisant la formule : $v = \frac{d}{t} = \frac{120000}{8000} = 15\ m/s = 54\ km/h$

<u>**Activité M2**</u> : ***Calcul de la distance connaissant la vitesse et le temps***
Un piéton marche à la vitesse de 4,5 km/h. Quelle distance parcourt-il en 1 h 15 mn ?

Corrigé de l'activité :
1 h 15 mn = 75 mn
La vitesse est de 4,5 km/h. Cela signifie que le piéton fait 4,5 km en 1 heure (ou en 60 minutes).
Règle de trois :
Si en 60 mn, la distance parcourue est de 4,5 km, en 1 mn, la distance parcourue sera 60 fois plus faible, et en 75 mn, 75 fois plus grande, soit $d = \frac{4,5 \times 75}{60} km = 5,625 km$
∗ Autre méthode en utilisant la formule : $d = vt = 4,5 \times \frac{75}{60} = 5,625\ km$

<u>**Activité M3**</u> : ***Calcul du temps connaissant la vitesse et la distance***
Quel temps met un cycliste pour parcourir 25 km à la vitesse de 15 km/h ?

Corrigé de l'activité :
La vitesse est de 15 km/h. Cela signifie que le cycliste parcourt 15 km en 1 h (ou en 60 mn).
Règle de trois :
Si pour faire 15 km, le cycliste met 60 mn,
Pour faire 1 km, il mettra 15 fois moins de temps, et pour faire 25 km, 25 fois plus de temps que pour faire 1 km, soit $t = \frac{60 \times 25}{15} mn = 100 mn = 1\ h\ 40 mn$.
∗ Autre méthode en utilisant la formule : $t = \frac{d}{v} = \frac{25}{15}\ h = \frac{25}{15} \times 60 = 100\ mn = 1\ h\ 40\ mn$

A RETENIR : *RENCONTRE DE DEUX MOBILES*

1- ***Véhicules allant <u>en sens contraire</u>*** : $\boxed{t = \dfrac{d}{v_1 + v_2}}$ les deux véhicules sont à l'origine séparés d'une distance **d**, partent en même temps, avec des vitesses respectives $\mathbf{v_1}$ et $\mathbf{v_2}$ et se croisent à l'instant **t**.

2- ***Véhicules allant <u>dans le même sens</u>*** : $\boxed{t = \dfrac{d}{v_2 - v_1}}$ les deux véhicules sont à l'origine séparés d'une distance **d**, partent en même temps, avec des vitesses respectives $\mathbf{v_1}$ et $\mathbf{v_2}$ ($\mathbf{v_2} > \mathbf{v_1}$) et se rencontrent à l'instant **t**.

<u>Activité M4</u> : *Mobiles allant en sens contraires*

Deux convois partent en même temps de deux villes A et B distantes de 135 km, le premier à la vitesse moyenne de 42 km/h et le deuxième à la vitesse moyenne de 48 km/h. Au bout de combien de temps et à quelle distance de A se rencontreront-ils ?

A B

42 km/s 48 km/h

Corrigé de l'activité :

En une heure, les deux convois se rapprochent d'une distance égale à la somme des distances parcourues par chacun d'eux, soit : 42 km + 48 km = 90 km

Règle de trois :

Si les convois se rapprochent de 90 km en 1 h, ils se sont rapprochés de 1 km en 90 fois moins de temps et de 135 km en 135 fois plus de temps que pour 1 km, d'où

$$t = \frac{1 \times 135}{90} = 1{,}50\ h = 1\ h + (0{,}5 \times 60)\ mn = 1\ h\ 30\ mn$$

Les deux convois se rencontrent 1 h 30 mn après leur départ.

Distance parcourue jusqu'au point de rencontre par le convoi parti de A.

t = 1 h 30 mn = 90 mn ; v = 42 km/h

On utilise la formule : $d = vt = \dfrac{42 \times 90}{60}\ km = 63\ km$ (v en km/h et t en h)

Les deux convois se rencontrent à 63 km de A ou bien à (135-63) km = 72 km de B.

∗ Autre approche pour calculer le temps mis pour se rencontrer en utilisant la formule :

$$\boxed{t = \frac{d}{v_1 + v_2} = \frac{135}{42 + 48} = 1{,}5\ h = 1\ \text{h}\ 30\ \text{mn}}$$

<u>Exercice M1 :</u>

Soit, par exemple, deux mobiles partant l'un d'un point A à 8 h et allant vers B à la vitesse de 80 km/h, l'autre d'un point B à 8 h 15 mn et allant vers A à la vitesse de 60 km/h. A quelle heure se rencontreront-ils sachant que la distance AB est de 160 km ?

<u>Voir « CORRIGE-M1 »</u>

<u>Activité M5</u> : ***Mobiles allant dans le même sens***

Un convoi part d'une ville A à la vitesse de 45 km/h. Au bout de 24 mn, un motocycliste, roulant à la vitesse de 69 km/h, part à la poursuite du convoi en suivant le même itinéraire. Au bout de combien de temps et à quelle distance de A le motocycliste rattrapera-t-il le convoi ?

Corrigé de l'activité :

Au départ du motocycliste, le convoi a déjà roulé pendant 24 mn.

Il a donc parcouru $d = \dfrac{45 \times 24}{60} = 18\ km$

En 1 heure, le motocycliste parcourt 69 km et le convoi 45 km. Ils se rapprochent donc de 24 km par heure.

Si le motocycliste rattrape 24 km en 1 heure, il rattrape 1 km en 24 fois moins de temps, et 18 km en 18 fois plus de temps que pour 1 km d'où

$t = \dfrac{1 \times 18}{24} = 0{,}75\ h = (0{,}75 \times 60)\ mn = 0\ h\ 45\ mn$

t = 0 h 45 mn

Le motocycliste a alors parcouru $d = \dfrac{69 \times 45}{60} = 51{,}75\ km$

Autre approche pour calculer le temps mis pour se rencontrer en utilisant la formule :

$$\boxed{t = \dfrac{d}{v_2 - v_1} = \dfrac{18}{69 - 45} = 0{,}75\ h = 45\ \mathrm{mn}}$$

<u>Activité M6</u> : ***Représentation générale graphique des mouvements uniformes***

Un piéton part de Paris à midi et marche à la vitesse constante de 4 km/h.

Représentation graphique :

Traçons deux axes perpendiculaires Ox et Oy et représentons l'instant et le lieu du départ par le point 0.

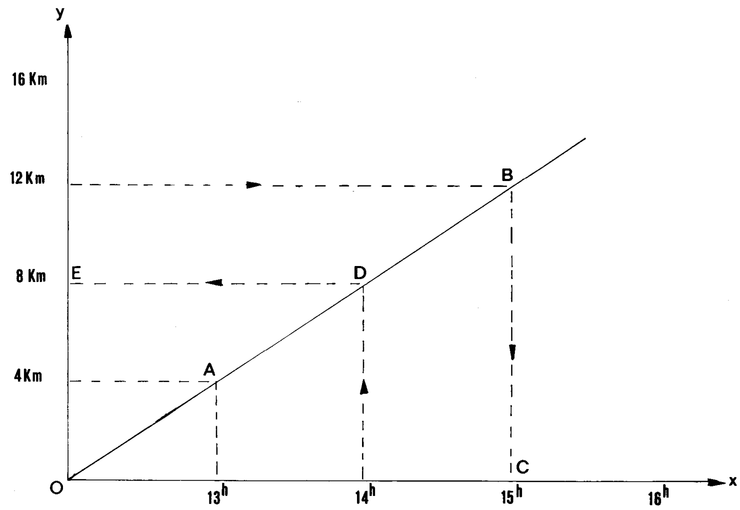
Représentons 1 heure par 3 cm sur l'axe 0x

Représentons 2 km par 1 cm sur l'axe 0y

En 1 heure, donc à 13 heures, le piéton a parcouru 4 km puisque sa vitesse est de 4 km/h.

Menons une parallèle à Ox passant par le point 4 km

Menons une parallèle à Oy passant par le point 13 h.



Ces deux droites se coupent en A qui caractérise la position du piéton dans le temps (axe des x) et dans l'espace (axe des y) après une heure de marche.

Le mouvement étant uniforme, on considérera que la droite OA est la représentation graphique du mouvement du piéton dans le temps et dans l'espace.

Ce graphique nous permet de visualiser deux types de problèmes :

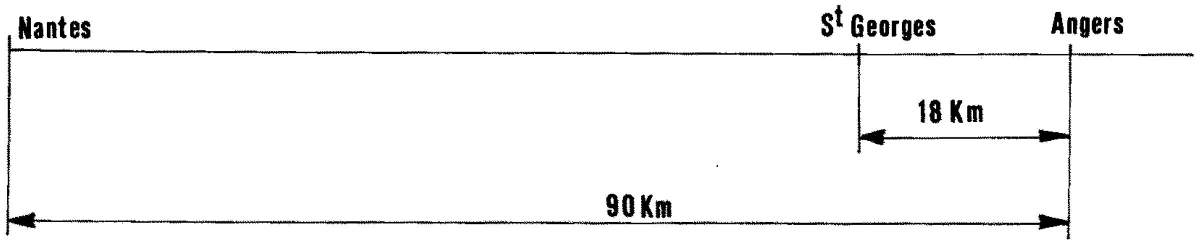
1. A quelle heure, le piéton a-t-il fait 12 km ?
   Du point 12 km sur Oy, on trace une parallèle à Ox qui coupe la droite OA en B. De B, on trace une parallèle à Oy qui coupe Ox en C.
   Le point C correspond à 15 h. Le piéton a donc fait 12 km à 15 h.

2. Quelle distance a parcourue le piéton à 14 h ?
   Du point 14 h sur Ox, on trace une parallèle à Oy qui coupe la droite OA en D. De D, on trace une parallèle à Ox qui coupe Oy en E.
   Le point E correspond à 8 km. A 14 h , le piéton a parcouru 8 km.

<u>Activité M7</u> : ***Représentation graphique de plusieurs mouvements uniformes***

La distance Angers - Nantes est de 90 km. Saint Georges-sur-Loire est situé sur le trajet à 18 km d'Angers. Un cycliste part de Saint Georges-sur-Loire à midi en direction de Nantes à la vitesse de 18 km/h. Un autre cycliste part de Nantes à 12 h 30 mn en direction d'Angers à la vitesse de 24 km/h.
Tracer le graphique du mouvement
Déterminer où et quand a eu lieu la rencontre entre les deux cyclistes.

Corrigé de l'activité :



Construction du graphique : Représentons la marche des deux cyclistes.

1. Détermination des axes
   Prenons <u>midi</u> comme origine des <u>temps</u> et représentons 15 minutes par 8 mm (axe Ox).
   Prenons <u>Angers</u> comme origine des <u>distances</u> et représentons 6 km par 1 cm (axe Oy).

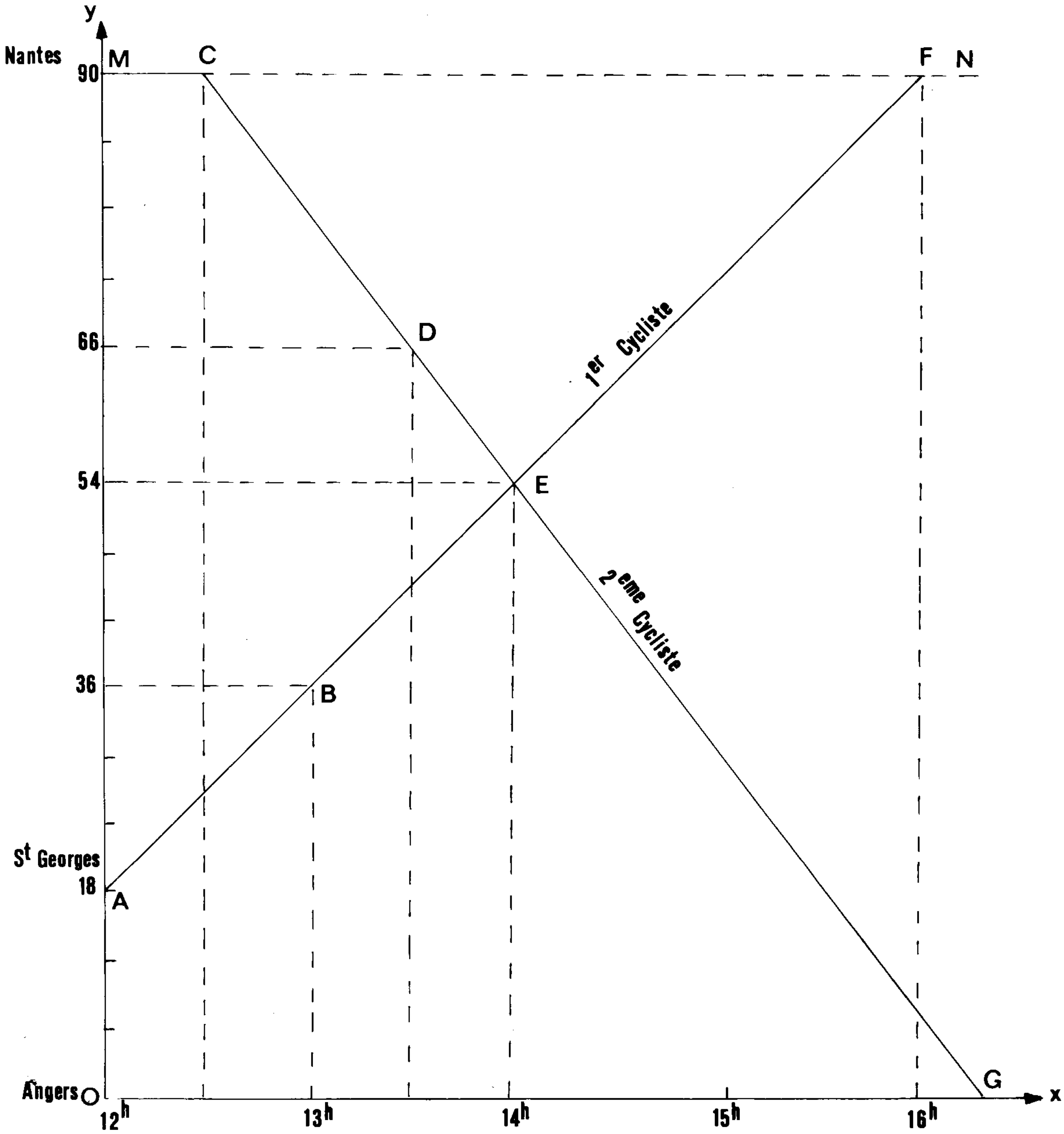
2. Tracé des droites représentatives
   Premier cycliste : A midi, il est à Saint-Georges (ou à 18 km d'Angers). Sa position peut être représentée par le point A (12 h ; 18 km).
   Une heure plus tard, il est à 18 km de Saint Georges (ou à 36 km) d'Angers. Sa position peut être représentée par le point B (13 h ; 36 km).
   Les points de la droite AB permettent de déterminer les positions successives du 1er cycliste sur Oy, en fonction du temps sur Ox.

   Deuxième cycliste : A midi et demi, il est à Nantes, à son point de départ (ou à 90 km d'Angers). Sa position peut être représentée par le point C (12h30mn ; 90 km).

   Remarque : Entre 12 h et 12 h 30, le cycliste ne s'est pas déplacé. Pendant ce temps, sa vitesse est nulle ; cela se traduit graphiquement par le segment MC parallèle à l'axe des x.

   Une heure plus tard, il est à 24 km de Nantes ou à 66 km d'Angers. Sa position peut être représentée par le point D (13h30mn ; 66 km).
   Les points de la droite CD permettent de déterminer pour le deuxième cycliste le temps en fonction de la distance, ou l'inverse, sur les axes.

   Les droites AB et CD expriment donc le mouvement des deux cyclistes. Le point E, où elles se coupent, correspond donc à leur point de rencontre dont les coordonnées sont le temps et la distance.
   A l'aide du graphique, il est donc possible de savoir où et quand a eu lieu cette rencontre.



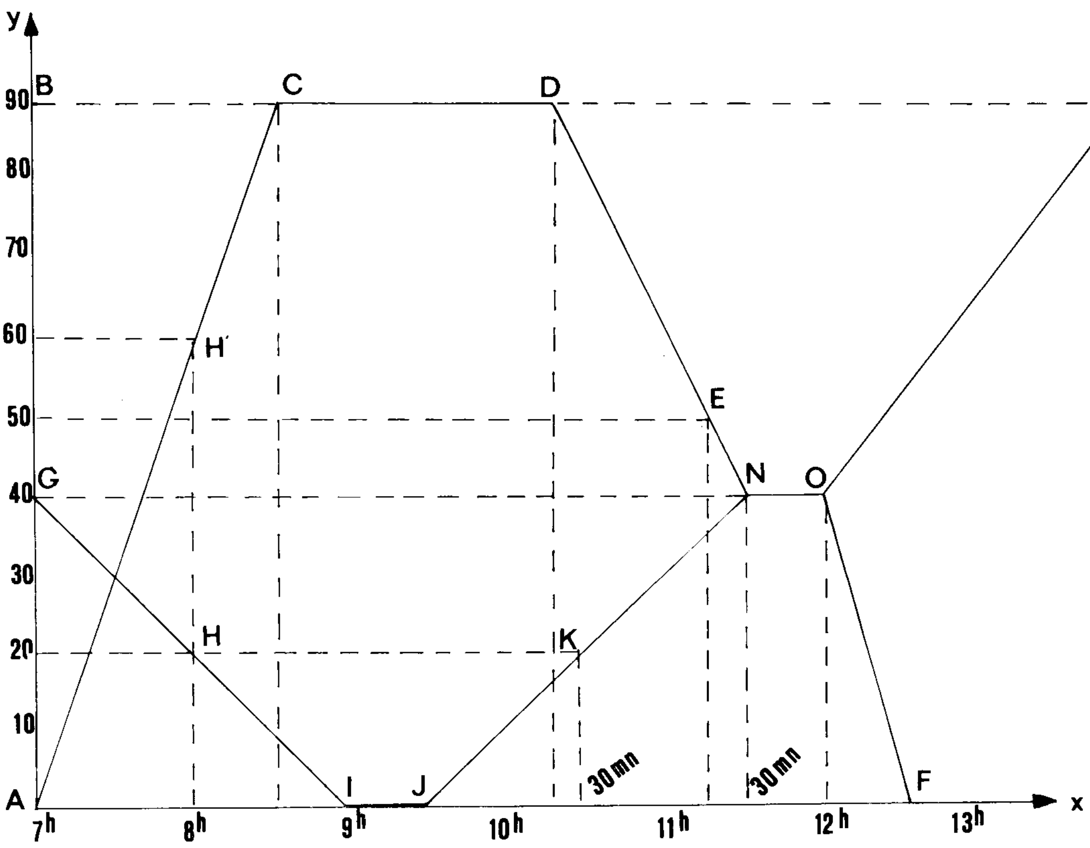
Par E, menons une parallèle à Oy. Celle-ci coupe Ox à 14 h.
Par E, menons une parallèle à Ox. Celle-ci coupe Oy à 54 km.
La rencontre a donc eu lieu à 14 h et à 54 km d'Angers.

De la même façon nous pouvons définir l'heure d'arrivée du 1er cycliste à Nantes (Point F). Du point F menons une parallèle à Oy. Celle-ci coupe Ox à 16h.
Le premier cycliste arrive à Nantes à 16 h.

Activité M8 :
En face de chaque donnée du problème, effectuez la traduction graphique.

Données	**Traduction Graphique**
Un automobiliste part de A à 7 h pour B situé à 90 km. Il y arrive à 8 h 30 mn.	Droite AH'C

Données	Traduction Graphique
Il s'y arrête 1 h 45 mn.	Droite CD
Il repart vers A à 40 km/h.	Droite DEN
Un cycliste part à 7 h pour A d'un point situé sur AB à 40 km de A avec une vitesse de 20 km/h.	Droite GHI
Il s'arrête en A une demi-heure.	Droite IJ
Puis repart vers B avec la même vitesse.	Droite JKN
Quand les deux mobiles se croisent pour la seconde fois ils s'arrêtent 30 mn.	Droite NO
L'automobiliste repart ensuite vers A cette fois à la vitesse de 80 km/h.	Droite OF
Alors que le cycliste repart vers B à la vitesse de 25 km/h.	Droite OL



NB : Les points H', E, H et K sont utilisés pour faciliter le tracé du graphique.

<u>Attention</u> :

Les graphiques ne donnent pas toujours les résultats exacts car ceux-ci dépendent de la précision des mesures. Les graphiques ne constituent pas une méthode de résolution des problèmes mais servent surtout à confirmer les résultats obtenus par la méthode arithmétique et à éviter des erreurs grossières.

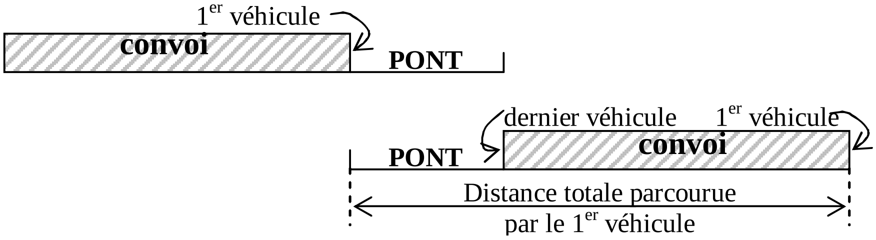
Activité M8 : ***Problème particulier, l'écoulement d'une colonne***

Un ensemble de 50 véhicules (longueur moyenne 7 m) doit effectuer le franchissement du Rhin sur un pont Gillois long de 256 m. Quel sera le temps total écoulé entre le moment où le premier véhicule arrivera au pont et le moment où le dernier véhicule sortira du pont, sachant que l'espacement moyen entre les véhicules doit être de 30 m et que leur vitesse est de 20 km/h ?

Corrigé de l'activité :

Calculons tout d'abord la longueur totale du convoi (revoir la leçon sur les intervalles).
Longueur totale des véhicules : 7 x 50 = 350 m.
Longueur totale des intervalles : 30 x 49 = 1 470 m.
Longueur totale du convoi : 350 + 1 470 = 1 820 m.

Etudions maintenant le schéma ci-dessous.



La distance parcourue par le 1er véhicule entre le moment où il pénètre sur le pont et le moment où le dernier véhicule sort du pont, est égale à la longueur du pont ajoutée à la longueur du convoi.

Soit d = 256 m + 1 820 m = 2 076 m = 2,076 km.

Temps total écoulé :

$$t = \frac{1 \times 2{,}076}{20} h = \frac{60 \times 2{,}076}{20} \; mn = 6{,}228 \; mn = 6 \; mn + (60 \times 0{,}228) \; s = 6 \; mn \, 13 \; s$$

t = 6 mn 13 s (et 68 centièmes de secondes).

<u>Exercice corrigé</u> :

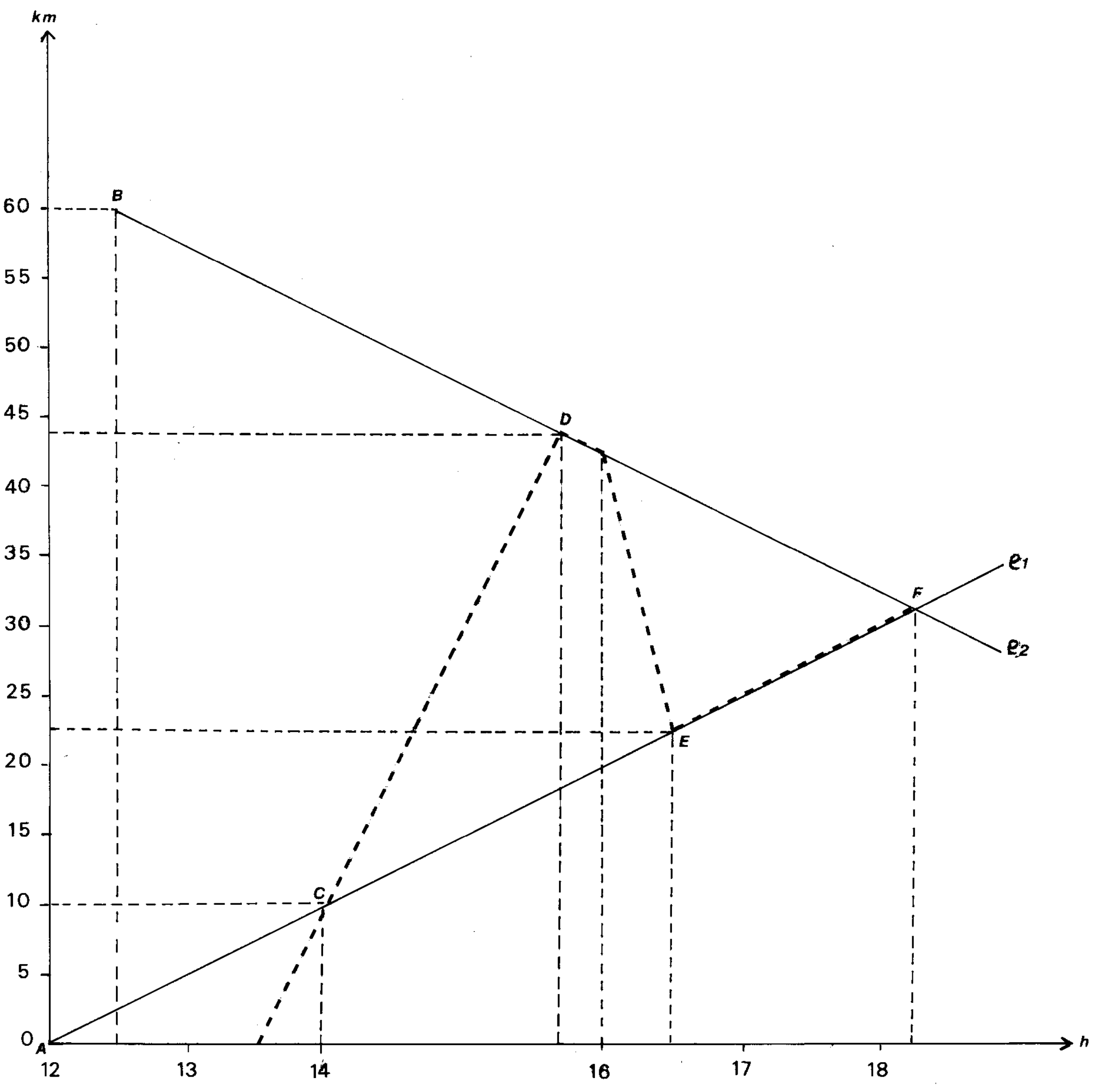
Deux équipes participent à un rallye pédestre. La première équipe $\mathbf{e_1}$ part du point A à 12 h en direction de B à la vitesse de 5 km/h. la deuxième équipe $\mathbf{e_2}$ part de B vers A à 12h30 à la vitesse de 5 km/h.
A et B sont distants de 60 km. L'organisateur avec sa jeep de liaison part de A vers B à 13h30 à la vitesse de 20 km/h. Il rencontre $\mathbf{e_1}$ au point C et continue en direction de B. Il rencontre $\mathbf{e_2}$ en D et reste avec cette deuxième équipe jusqu'à 16 h. Ensuite il repart à 40 km/h vers e_1 qu'il rencontre en E. Il restera avec $\mathbf{e_1}$ jusqu'à la rencontre des 2 équipes.

1. Représenter graphiquement les mouvements des équipes $\mathbf{e_1}$, $\mathbf{e_2}$ et de l'organisateur. (origine des temps : 12 h, origine des distances : le point A. 1 cm représente 5 km, 2 cm représentent 1 heure).
2. Déterminer par le calcul (et vérifier sur le graphique)
   a) l'heure de la première rencontre de l'organisateur avec $\mathbf{e_1}$.
   b) l'heure de la rencontre de l'organisateur et $\mathbf{e_2}$.
   c) la distance de A à D.

3. Déterminer
   a) l'heure de rencontre en E de l'organisateur et $\mathbf{e_1}$.
   b) la distance de E à A.
4. Déterminer l'heure de rencontre de $\mathbf{e_1}$ et $\mathbf{e_2}$.
5. Quelle distance l'organisateur aura-t-il parcouru ?

Corrigé de l'exercice :

1. Représentation graphique des mouvement.



2. Calcul
   a) Heure de la 1ère rencontre de l'organisateur avec $\mathbf{e_1}$.

   Quand l'organisateur part, $\mathbf{e_1}$ a parcouru $\frac{5 \times 90}{60} = 7{,}5$ *km.*

   $\mathbf{e_1}$ et l'organisateur vont dans le même sens, donc en 1 heure l'organisateur gagnera sur $\mathbf{e_1}$ 20 – 5 = 15 km.

   Si l'organisateur gagne sur $\mathbf{e_1}$ 15 km en 1 heure (= 60 mn), il gagne sur $\mathbf{e_1}$ 1 km en 60/15 mn et 7,5 km en $\frac{60 \times 7{,}5}{15} = 30$ *mn.*

   Heure de rencontre : 13 h 30 mn + 30 mn = 14 h.

b) Heure de rencontre de l'organisateur avec **e_2**.

Au départ de l'organisateur, **e_2** a déjà parcouru $\frac{5\times 1}{1} = 5\ km.$

A 13h30, la distance qui sépare **e_2** et l'organisateur est de 60 km – 5 km = 55 km.
e_2 et l'organisateur vont en sens contraire ; en 1 heure ils se rapprochent de 20 km + 5 km = 25 km.

Ils se rencontreront au bout de $\frac{55\times 60}{25} = 132\ mn = 2\ h\ 12\ mn.$

Heure de rencontre du capitaine et de e_2 : 13 h 30 mn + 2 h 12 mn = 15 h 42 mn.

c) Pour aller de A à D la jeep de l'organisateur roule pendant 132 mn à 20 km/h
D = V x t

Distance A à D $= \frac{20\times 132}{60} = 44\ km.$

3. Calcul

a) Heure de rencontre en E de l'organisateur et **e_1**.

A 16 heures, **e_1** a parcouru $\frac{5\times 4}{1} = 20\ km.$

A 16 heures, **e_2** a parcouru $\frac{5\times 3h30}{1} = \frac{5\times 210}{60} = 17{,}5\ km.$

Donc à 16 heures, heure à laquelle l'organisateur quitte **e_2**, la distance qui sépare **e_1** et l'organisateur est de 60 – (20 + 17,5) = 22,5 km.
e_1 et l'organisateur vont en sens contraire. Ils se rapprochent à la vitesse de : (40 + 5) km/h = 45 km/h.

La rencontre s'effectuera au bout de $\frac{60\times 22{,}5}{45} = 30\ mn.$

Heure de rencontre : 16 h + 30 mn = 16 h 30 mn.

b) Distance de E à A.
Pour aller de A à E, **e_1** a marché pendant 4 heures 30 mn à 5 km/h.
Distance = V x t = 5 x 4 h 30 mn = 22,5 km.

4. Heure de rencontre entre **e_1** et **e_2**.

A 12h30, **e_1** a déjà parcouru $\frac{5\times 30}{60} = 2{,}5\ km.$

Distance qui sépare **e_1** et **e_2** à 12h30 : 60 km – 2,5 km = 57,5 km.
Les deux équipes vont en sens contraire, donc elles se rapprochent à la vitesse de (5 + 5) km/h = 10 km/h.

Elles se rencontreront au bout de $\frac{60\times 57{,}5}{10} = 345\ mn = 5\ h\ 45\ mn.$

Heure de rencontre : 12 h 30 mn + 5 h 45 mn = 18 h 15 mn.

5. Pour aller de A à D, la jeep de l'organisateur a parcouru 44 km. Ensuite l'organisateur est resté avec **e_2** et a marché avec l'équipe pendant 18 mn à 5 km/h.

L'équipe et l'organisateur auront ainsi parcouru $\frac{5\times 18}{60} = 1{,}5\ km.$

A 16 h, l'organisateur est parti à la rencontre de $\mathbf{e_1}$ à la vitesse de 40 km/h pendant 30 mn, il aura donc effectué $\frac{40 \times 30}{60} = 20\ km.$

A 16 h 30 mn, l'organisateur rencontre $\mathbf{e_1}$ et reste avec l'équipe jusqu'à 18 h 15 mn, tout en continuant à marcher à la vitesse de 5 km/h.

Il a donc parcouru avec $\mathbf{e_1}$: $\frac{5 \times 105}{60} = 8{,}75\ km.$

Distance totale : 44 km + 1,5 km + 20 km + 8,75 km = 74,25 km.

Exercice M2 :

Le train Paris-Bordeaux effectue la distance de 572 km de 13 h 00 à 19 h 30.

1- Quelle est la vitesse moyenne du train ?
2- Le mauvais temps a provoqué un problème technique qui a obligé le train à s'arrêter 15 mn à la gare de Poitiers, à 330 km de Paris. Pour respecter l'heure d'arrivée, quelle devrait être la nouvelle vitesse moyenne du train sur le tronçon Poitiers-Bordeaux ?

Voir « CORRIGE-M2 »

Exercice M3 :

Deux camions transportent un chargement de produits très dangereux sur une distance de 36 km. Le premier camion quitte l'usine à 13 h 00 à la vitesse moyenne de 28 km/h. Quand il arrive au premier rond-point, au seuil de l'agglomération, situé à 3,5 km de l'usine, le second camion prend le départ en empruntant le même itinéraire à la vitesse de 32 km/h.

1 – A quelle heure le second camion rattrape-t-il le premier camion ?
Quelle est la distance entre le point de jonction et le point de départ ?

2 – Lorsque les camions se rencontrent au point de jonction, ils terminent leur parcours à la vitesse moyenne de 30 km/h. A quelle heure arrivent-ils à destination ?

Voir « CORRIGE-M3 »

Exercice M4 :

Deux athlètes reconnaissent un circuit marathonien décrit de la façon suivante :

- Au départ A, on commence par une montée de 4 km jusqu'en C,
- Puis il y a une descente de 9 km jusqu'en D,
- Puis c'est l'itinéraire inverse de retour au point de départ.

Pour l'examen du trajet, le premier athlète utilise une jeep, il roule à 40 km/h en montée et à 60 km/h en descente.

1- Sachant que la jeep part à 8 h 00 du matin de A pour effectuer le circuit, à quelle heure termine-t-il la boucle du circuit ?

Le second athlète possède une voiture de tourisme qui roule comme la jeep à 40 km/h en montée et à 60 km/h en descente. Il commence son parcours de reconnaissance à partir du point B au milieu de la montée AC, au moment où la jeep le rejoint en ce point. Le parcours de reconnaissance depuis B est décrit de la façon suivante :

- Du point B, il descend jusqu'en A
- Puis il effectue une pause pendant 10 mn pour prendre de l'essence,
- Puis il revient en B et s'arrête 2 mn pour réfléchir,

- Puis il poursuit jusqu'en C et s'arrête encore une fois 2 mn pour réfléchir,
- Enfin, il termine l'examen du trajet en D.

2.1 - Présenter le schéma du parcours.
2.2 - Calculer l'heure du premier croisement en B.
2.3 - Présenter graphiquement les mouvements de la jeep et de la voiture de tourisme (origine des distances : le point A, 1 cm représente 1 km, origine des temps : l'heure du 1er croisement en B, 1 cm représente 2 mn)
2.4 - Déterminer par le calcul (et vérifier sur le graphique)
 a- l'heure de la seconde rencontre en O entre la jeep et la voiture de tourisme
 b- le point de croisement en O.

Voir « CORRIGE-M4 »

Exercice M5 :
Un train long de 230 m part d'un point A en direction de B à 14 heures avec une vitesse de 80 km/h et un autre long de 250 m part de B à 14 h 12 mn avec une vitesse de 90 km/h. La distance de A à B est de 260 km. La ligne est à double sens jusqu'à un tunnel de 2 km de long que chaque train franchit à son tour. L'entrée du tunnel se situe exactement à 130 km de A. Le train qui arrive le premier au sémaphore (signalisation sur bande d'arrêt sécurisée) situé à 200 m de chaque côté du tunnel s'engage sous ce dernier.

1- Représenter le schéma du parcours entre A et B.
2- Lequel des deux trains s'engage en premier sous le tunnel ?
3- Quel est le temps d'attente de l'autre train au sémaphore, sachant qu'il repart dès que le dernier wagon du premier train ait franchi le sémaphore ?

Voir « CORRIGE-M5 »

Exercice M6 :
Une entreprise est spécialisée dans la fabrication de meubles en bois. Pour satisfaire une demande commerciale de 160 tables, deux menuisiers sont chargés de réaliser le travail.
Le premier expérimenté fabrique 5 tables par jour et l'autre seulement 3 tables.
1 – Combien faudra-t-il de jours pour satisfaire la demande commerciale ?
2 – En fait, le client trouve toujours 8% de défaut parmi les tables présentées.
Combien faudra-t-il fabriquer de tables pour que le client reçoive les 160 tables commandées ?
Quel est le nouveau délai ?

Voir « CORRIGE-M6 »

Exercice M7 :
Deux entreprises concurrentes commercialisent des automobiles de même puissance. Les ventes mensuelles du premier modèle ont commencé en janvier 2002 et s'élèvent en moyenne à 2 000 unités. Les ventes du modèle plus récent ont commencé en avril 2002 et on s'attend à un rythme de ventes mensuelles de 2 300 unités.
1 – Quand les ventes du 2nd modèle rattraperont-elles celles du premier ?
2 – Quelles seront les quantités d'automobiles vendues au moment de l'équilibre des ventes ?

Voir « CORRIGE-M7 »

MAÎTRISE DES BASES DE MATHÉMATIQUES

SÉANCE N° 7

POURCENTAGES ET INTÉRÊTS

- N - LES POURCENTAGES

A RETENIR :

- On appelle pourcentage d'une quantité donnée, une fraction de cette quantité dont le dénominateur est 100.
- Dans tous les calculs sur les pourcentages, la règle de trois est utilisée.
- Le résultat d'une formule mathématique, compris entre -1 et 1, est souvent présenté sous forme de pourcentage.
- Une variable, exprimée en pourcentage dans une formule mathématique, sera utilisée dans le calcul, dans la plupart des cas, sous sa forme décimale sans pourcentage.

Exercice corrigé : ***Calcul d'une quantité connaissant son pourcentage***
Un alliage de cuivre et d'aluminium contient 90% de son poids en cuivre et pèse 7,890 kg.
Quel poids de cuivre contient-il ?

Corrigé de l'exercice :
Si 100 g d'alliage contiennent 90 g de cuivre, 1g d'alliage contient 100 fois moins de cuivre et 7 890 g contiennent 7 890 fois plus qu'un gramme. D'où : $\frac{90\,\text{g} \times 7890}{100} = 7101\,\text{g}$ de cuivre.

Exercice corrigé : ***Calcul du pourcentage***
Un gérant a fait un bénéfice de 724,5 € sur une marchandise qu'il a achetée 34 500 €.
Calculer le pourcentage du bénéfice sur le prix d'achat.

Corrigé de l'exercice :

Calculons d'abord le pourcentage du bénéfice réalisé sur 100 € d'achat :
Si sur 34 500 € d'achat le bénéfice réalisé est de 742,5 €, sur 1 € d'achat le bénéfice sera 34 500 fois plus petit et sur 100 € d'achat il sera 100 fois plus élevé que pour 1 €. D'où : $\frac{742{,}5 \times 100}{34\ 500} = 2{,}1$ €.
Calculons ensuite le pourcentage du bénéfice sur le prix d'achat. Le gérant a fait un bénéfice de 2,1 € pour 100 € ; donc le pourcentage du bénéfice sur le prix d'achat est : $\frac{2{,}1}{100} = 2{,}1\%$.

<u>Exercice corrigé</u> : ***Calcul de la quantité soumise au pourcentage***

Un acheteur a bénéficié dans un magasin d'une remise de 4% sur ses achats. Il a payé 220,8 €
Calculer le prix d'achat sans remise.

Corrigé de l'exercice :

Les 220,8 € payés représentent, compte tenu de la remise, $\frac{96}{100}$ du prix normal $\left(\frac{100}{100} - \frac{4}{100}\right)$.
Si $\frac{96}{100}$ de ce prix d'achat valent 220,8 €, $\frac{1}{100}$ de ce prix vaudra 96 fois moins et $\frac{100}{100}$ vaudront 100 fois $\frac{1}{100}$. D'où : $\frac{220{,}8 \times 100}{96} = 230$ €.

Autre formulation de la règle de trois :

Prix normal	100 €	X
Prix payé (avec remise)	96 €	220,8 €

$\frac{100}{96} = \frac{X}{220{,}8}$ d'où : $X = \frac{220{,}8 \times 100}{96} = 230$ €

<u>Exercice N1 :</u>

Le salaire d'un cadre est de 3 114,30 €.
1- Calculez son nouveau salaire sachant qu'il doit bénéficier d'une augmentation de 1,75 %.

En fait il perçoit 3 161,03 €, une retenue pour charge sociale ayant été opérée sur son salaire pour tenir compte d'un dépassement d'un « plafond ».
2- Quel a été le pourcentage réel de l'augmentation ?

<u>Voir « CORRIGE-N1 »</u>

<u>Exercice N2 :</u>

On sait que l'air contient 21% d'oxygène.

Combien de décimètres cubes d'oxygène absorbe par jour, par la respiration, un homme adulte, s'il fait 15 respirations par minute et introduit chaque fois 1 demi-décimètre cube d'air dans ses poumons ?

Combien de décimètres cubes de gaz carbonique rejette-t-il dans le même temps, si le gaz carbonique entre pour 4,5 % dans le volume de l'air expiré et si l'air expiré n'est que 99,5 % de l'air inspiré, l'organisme conservant une partie de l'oxygène absorbé ?

<u>Voir « CORRIGE-N2 »</u>

- O - LES INTÉRÊTS SIMPLES

A RETENIR :

- Le **capital** est la somme placée ou prêtée.
- Le **taux** (par défaut, annuel) est le quotient de l'intérêt annuel sur le capital.

☞ Le résultat est trouvé sous forme décimale et présenté sous forme de pourcentage.

- L'**intérêt** est le loyer de la somme placée ou prêtée.
- Intérêt annuel = taux × capital ; $\text{Taux} = \dfrac{\text{intérêt annuel}}{\text{capital}}$; $\text{C}apital = \dfrac{\text{intérêt annuel}}{\text{taux}}$
- Intérêt total = intérêt annuel × durée du placement en année
- Une variable, exprimée en pourcentage dans une formule mathématique, sera utilisée dans le calcul, dans la plupart des cas, sous sa forme décimale sans pourcentage.
- **Année monétaire** = 360 jours (elle a un sens pour une durée ≤ 11 mois)
- **Année commerciale** = 360 jours = 12 mois de 30 jours (elle a un sens au delà d'une durée d'un an, ce mode de calcul de jours n'est pas intégré dans la calculatrice).

<u>**Exercice corrigé**</u> : ***Calcul des intérêts***

Pour l'achat d'un véhicule, une banque accepte de prêter 1 200 € pendant 2 ans à un taux de 9%. Quel est l'intérêt annuel de ce prêt ? Quel est l'intérêt total ? Quelle est la somme à rembourser ?

Corrigé de l'exercice :

Le taux étant de 9%, l'intérêt annuel est les $\dfrac{9}{100}$ de la somme empruntée. Il sera donc de :

$$1\,200 \times \frac{9}{100} = 108\text{ €} \quad (\text{ intérêt annuel = taux} \times \text{capital }).$$

L'intérêt étant proportionnel à la durée du prêt, il sera pour deux ans de : 108 × 2 = 216 €.
(Intérêt total = intérêt annuel × durée du placement en année)
La somme à rembourser est égale au capital emprunté surajouté de l'intérêt total. Dans ce cas présent cette somme S sera : 1 200 € + 216 € = 1 416 €.

<u>**Exercice corrigé**</u> : ***Calcul du taux de placement***

Pour un emprunt de 2 400 € pendant 1 an 4 mois et 10 jours, une banque demande un intérêt de 196 €. Quel est le taux de placement ?

Corrigé de l'exercice :

Calculons d'abord l'intérêt à payer par an, en utilisant l'année commerciale :

1 an	=	360 jours
4 mois	=	120 jours
10 jours	=	10 jours
1 an 4 mois 10 jours	=	490 jours

Si pour 490 jours l'intérêt est de 196 €, pour 1 jour, il sera 490 fois plus faible et pour 360 jours 360 fois plus élevé que pour 1 jour. Soit : $196 \times \frac{360}{490} = 144$ €.

L'intérêt annuel est donc de 144 €.
Calculons ensuite le taux de placement :
Si pour 2 400 € l'intérêt annuel est de 144 €, pour 1 € il sera 2 400 fois plus faible et pour 100 € il sera 100 fois plus élevé que pour 1 €. Soit : $\frac{144 \times 100}{2\,400} = 6$ €.

Le taux de placement est donc de : $\frac{6}{100} = 6\,\%$ ($\text{Taux} = \frac{\text{intérêt annuel}}{\text{capital}}$).

<u>Exercice corrigé</u> : ***Calcul de la durée du placement***
Un capital de 450 € placé au taux de 4% a rapporté un intérêt total de 41,25 €.
Calculer la durée du placement.

Corrigé de l'exercice :

Calculons l'intérêt annuel pour un capital de 450 € au taux de 4% : $450 \times \frac{4}{100} = 18$ €.

Calculons la durée du placement : si pour un intérêt de 18 €, l'argent a été placé 360 jours, pour un intérêt de 1 € il aurait été placé 18 fois moins longtemps et pour un intérêt de 41,25 € il aurait été placé 41,25 fois plus longtemps que pour 1 €. Soit : $\frac{360 \times 41{,}25}{18} = 825$ jours ou 2 ans 3 mois 15 jours ($\text{Durée du placement} = \frac{360\ \text{j} \times \text{intérêt total}}{\text{intérêt annuel}}$).

<u>Exercice corrigé</u> : ***Calcul du capital***
Un capital placé à 4% rapporte 16,9 € en 1 an 3 mois et 18 jours. Quel est ce capital ?

Corrigé de l'exercice :
1 an 3 mois 18 jours = 468 jours. Si en 468 jours l'intérêt est de 16,9 €, en 1 jour il sera 468 fois plus faible et en 360 jours il sera 360 fois plus élevé qu'en 1 jour. Soit : $\frac{16{,}9 \times 360}{468} = 13$ €.

L'intérêt annuel de 13 € représente $\frac{4}{100}$ du capital. Le capital est donc de : $\frac{13 \times 100}{4} = 325$ €.

($\text{C}apital = \frac{\text{intérêt annuel}}{\text{taux}}$).

<u>Exercice O1 :</u>
Une personne place 2 500 € au taux de 4% d'intérêt simple.
Après 1 an 6 mois, elle reprend son argent et reçoit les intérêts correspondants.
1- Quelle somme reçoit-elle ?
2- Elle replace la somme reçue (capital + intérêt) pendant 6 mois. Cela lui procure un intérêt égal à la moitié de l'intérêt reçu pour le premier placement. A quel taux est effectué le deuxième placement ?

<u>Voir « CORRIGE-O1 »</u>

A RETENIR : ***Formules sur les intérêts simples***

$$I = C_0 \times i \times d \;;\; C_d = C_0(1 + i \times d)\;;\; C_0 = \frac{C_d}{1 + i \times d}$$

C_0	:	capital de départ : <u>valeur actuelle</u> du capital C_d
i	:	taux d'intérêt (annuel par défaut)
d	:	durée de placement du capital C_0 (par défaut, en année)
I	:	intérêt sur une période d
C_d	:	capital après intérêt sur une période d ; valeur acquise du capital C_0 au bout d'une période de durée d.

<u>**Exercice corrigé**</u> : ***Calcul du capital***

Un capital placé au taux trimestriel de 1,5% rapporte en deux ans et demi 75 € en intérêts simples. Quel est ce capital ?

Corrigé de l'exercice :

L'unité de temps pour calculer la durée des intérêts est le trimestre.

On utilise la formule : $C_0 = \dfrac{I}{i_{1/4} \times d}$ avec $I = 75$ € ; $i_{1/4} = 1{,}5$ % ; $d = 10$ et avec la calculatrice, on obtient : $C_0 = \dfrac{75}{0{,}015 \times 10} = 500$ €

Problème de l'escompte commercial des effets de commerce

<u>**Activité O1**</u> : ***L'escompte sur un effet de commerce***

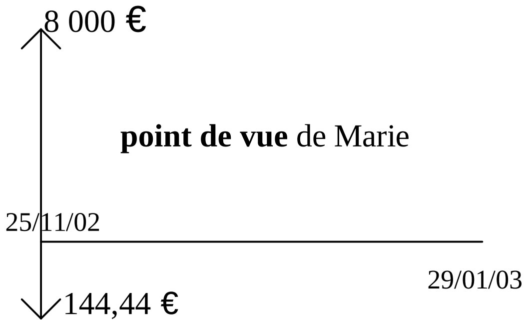
Au cours d'une transaction commerciale du 25 novembre 2002, François, ayant obtenu ses caisses de vin, a signé une reconnaissance de dette ou plus exactement un **effet de commerce** ou encore une **traite** à Marie, <u>commerçante</u>. Le montant de la dette est de 8 000 € et elle est à payer pour le 29 janvier 2003.

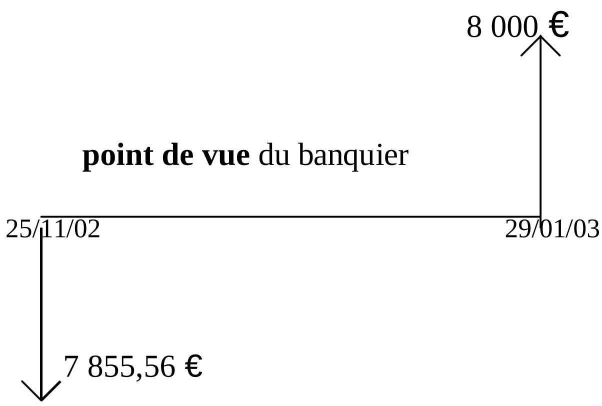
Marie, toujours pressée, décide de ne pas attendre le 29 janvier ; elle s'adresse alors à son banquier avant l'échéance, par exemple, le jour même (le 25 novembre). Tous deux **négocient** ; le banquier avance à Marie l'argent de la traite (ou **escompte** la traite) pour un montant de 8 000 €, moyennant une retenue (appelée **escompte**), proportionnelle au montant de la dette ($C_0 = 8\,000$ €), à la durée associée à la traite (d = 5 + 31 + 29 = 65 jours), et au **taux de l'escompte** fixé par le banquier ($\tau = 10\%$).

Ainsi, le 25 novembre 2002, Marie obtient finalement de la part de son banquier : $8\,000 - 8\,000 \times 0{,}10 \times \dfrac{65}{360} \approx 7\,855{,}56$ € ; elle a pu, grâce à son banquier, toucher en avance le montant de la traite, mais cela lui a coûté l'escompte : $8\,000 \times 0{,}10 \times \dfrac{65}{360} \approx 144{,}44$ €.

Dans ce type d'opération, l'escompte ou les intérêts payés au banquier sont versés au début de l'opération financière, les intérêts sont dits précomptés, le taux d'escompte est dit précompté.

Diagrammes des flux :





A RETENIR :

Effet de commerce = **traite** = lettre de change

Escompter = se faire payer la traite avant l'échéance

Escompte : $E = C_0 \times \tau \times d$ (l'intérêt retenu par le banquier)

- C_0 : valeur nominale de la traite
- τ : taux d'escompte (annuel)
- d : durée de l'escompte en année.

Encaissement du porteur de la traite dans l'opération de l'escompte (ou valeur actuelle de l'effet commercial) :

$$C = C_0 - E$$

Exercice corrigé :

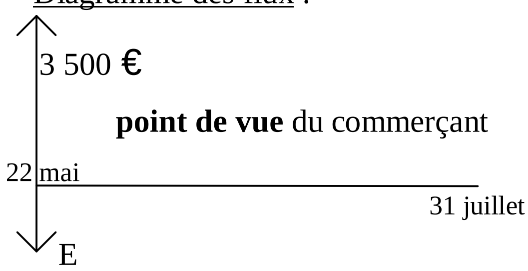
Un commerçant décide d'escompter le 22 mai, un effet de commerce qu'il détient sur un de ses clients. Les caractéristiques de l'effet sont les suivantes : - valeur nominale : 3 500 €

- taux d'escompte : 7,5%
- date d'échéance : 31 juillet

Calculez l'escompte commercial et la valeur d'encaissement (aussi appelée valeur actuelle commerciale)

Corrigé de l'exercice :

Diagramme des flux :



Le nombre de jours entre le 22 mai et le 31 juillet est égal à 70 jours (9+30+31=70).

Donc, l'escompte commercial est égal à :

$$E = C_0 \times \tau \times d = 3\,500 \times 0{,}075 \times \frac{70}{360} \approx 51{,}04 \text{ €}$$

La valeur d'encaissement est égal à :

$$C = C_0 - E \approx 3\,500 - 51{,}04 = 3\,448{,}96 \text{ €}$$

Exercice O2 :

La valeur actuelle d'un effet dont le nominal est 3 700 € payable dans 30 jours, est 3 656,06 €. Calculer le taux de l'escompte.

Voir « CORRIGE-O2 »

Exercice O3 :

La valeur actuelle d'une traite payable dans 43 jours est de 7 262,21 € au taux de 10%. Calculer la valeur nominale de cette traite.

Voir « CORRIGE-O3 »

Problème d'équivalence entre le taux d'intérêt précompté et le taux d'intérêt post-compté

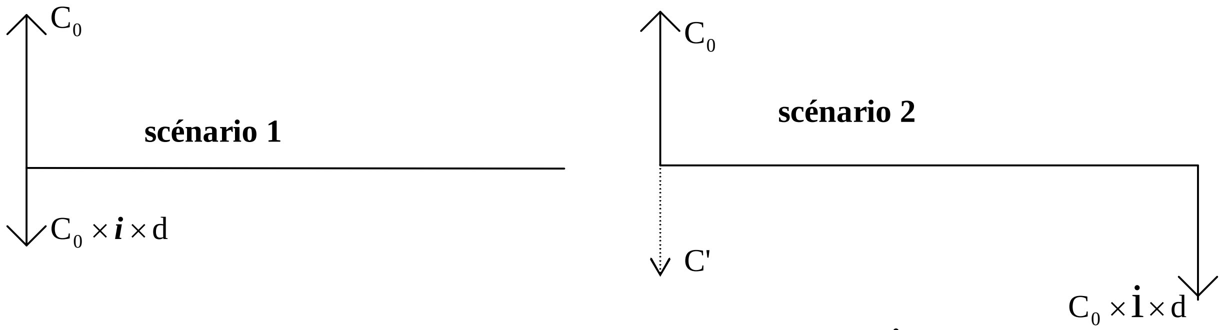
Activité O2 : ***Le taux précompté - le taux post-compté***

Marie emprunte une somme de C_0 = 10 000 € à une banque pour une durée de 7 mois = d=7/12 année. On suppose qu'il y ait deux scénarios équivalents :

scénario 1 : le taux d'intérêt précompté est de i = 7%

scénario 2 : le taux d'intérêt post-compté est de $\mathbf{i}$.

On obtient les deux diagrammes des flux avec le point de vue de Marie :



Dans le scénario 2, la valeur actuelle, en début d'échéance, de $C_0 \times \mathbf{i} \times d$ est notée C'.

La valeur acquise de C' sur une période d est : $C'(1+ \mathbf{i} \times d) = C_0 \times \mathbf{i} \times d$ donc : $C' = \dfrac{C_0 \times \mathbf{i} \times d}{1+\mathbf{i} \times d}$

Les deux scénarios sont équivalents lorsque les deux valeurs actuelles correspondant aux deux scénarios sont égales :

$$VA_1 = C_0(1 - i \times d) \quad \text{et} \quad VA_2 = C_0 - \frac{C_0 \times \mathbf{i} \times d}{1+\mathbf{i} \times d}$$

$$VA_1 = VA_2 \Rightarrow \boxed{i = \frac{\mathbf{i}}{1+\mathbf{i} \times d} \quad \text{et} \quad \mathbf{i} = \frac{i}{1 - i \times d}} \qquad (\mathbf{i} = 7{,}298\%)$$

Remarque : en général, le taux post-compté est celui que l'on utilise par défaut ; on l'appelle **taux effectif** de l'emprunt.

Exercice O4 :

On propose à un individu deux modes de placement sur 1 an : soit un placement A à intérêt simple au taux de 7%, soit un placement B à intérêt simple précompté au taux de 6,7%.

1- Lequel de ces deux placements est le plus intéressant ?

2- Pour quel taux annuel d'intérêt simple précompté i_B, le placement B est-il équivalent au placement A ?

Voir « CORRIGE-O4 »

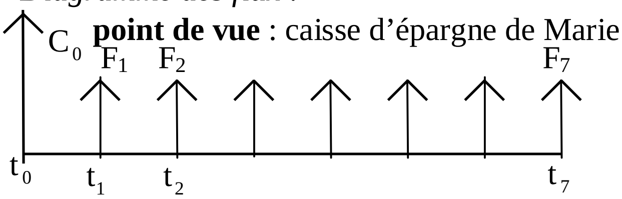
- P - LES INTÉRÊTS COMPOSÉS

A RETENIR :

- L'intérêt est dit **composé** lorsque le capital primitif est accru de ses intérêts au terme de chaque année et que la nouvelle somme est considérée alors comme un capital pour la nouvelle année.
- $C_n = C_0(1+i)^n$; $I = C_n - C_0$
  - C_0 : capital de départ : <u>valeur actuelle</u> du capital C_n
  - i : taux d'intérêt (annuel par défaut)
  - n : nombre fractionnaire de périodes (par défaut, en année)
  - C_n : valeur acquise du capital C_0 pendant n périodes
  - I : les intérêts sur n périodes

<u>Activité P1</u> : ***intérêts composés***
Marie place à sa banque 10 000 € à un taux de 4,5% à intérêts composés, pendant 7 ans. Quelle somme obtient-elle au bout de la première année, puis de la seconde et enfin, au bout de 7 ans ? (Représentez le diagramme des flux avec le point de vue de Marie).

Corrigé de l'activité :
Diagramme des flux :



A l'origine : C_0 = 10 000 €
Au bout d'un an : $C_1 = C_0 + C_0 \times i = C_0 (1+i)$
Au bout de 2 ans : $C_2 = C_1 + C_1 \times i = C_0 (1+i)^2$
Au bout de 7 ans : $C_7 = C_6 + C_6 \times i = C_0 (1+i)^7$
$t_1 = t_0 + 1$ an ; ... ; $t_7 = t_0 + 7$ ans

Avec la calculatrice, on obtient : C_1 = 10 450 € ; C_2 = 10 920,25 € ; $C_7 \approx$ 13 608,62 €

Exercice corrigé :
Un capital placé à intérêts composés pendant 8 années, à un taux de 12%, donne une valeur acquise de 86 658,71 €. Retrouvez le montant du capital.

Corrigé de l'exercice :
On applique la formule : $C_n = C_0(1+i)^n$ avec n=8 ans ; i=12% ; C_8 = 86 658,71 €. Donc le montant du capital est obtenu avec la calculatrice : $C_0 = \frac{C_8}{(1+i)^8} = \frac{86658{,}71}{1{,}12^8} = 35\,000$ €.

<u>Exercice P1</u> :
Quelle est au bout de 8 semestres, la valeur acquise d'un capital de 18 000 € placé au taux semestriel de 4,21% ?

<u>Voir « CORRIGE-P1 »</u>

Exercice P2 :
A quel taux est resté placé un capital de 9 000 € ayant acquis en 7 ans une valeur de 12 471 € ?

Voir « CORRIGE-P2 »

Exercice P3 : ***utilisation de fonction log de la calculatrice pour descendre un exposant***
Pendant combien de temps un capital de 7 000 € est-il resté placé à 4,58 % sachant que sa valeur acquise est 11 456 € ?

Voir « CORRIGE-P3 »

Exercice P4 :
Un étudiant décide d'acheter un véhicule d'occasion d'une valeur de 2 157 € et de le payer comptant. Pour réaliser cette opération, il dispose du $\frac{1}{6}$ de la somme à payer sur son compte courant bancaire. Il dispose également d'un salaire de 650 € en espèce qui vient de lui être versé pour son travail en télémarketing les week-end et enfin il désire retirer une partie de l'argent de son livret de caisse d'épargne. Il y a deux ans exactement, il avait versé sur ce dernier compte 1 100 € au taux de 3,5 % avec intérêts composés.

Quelle somme lui restera-t-il sur son livret de caisse d'épargne après avoir effectué le paiement de son véhicule ?

Voir « CORRIGE-P4 »

Exercice P5 :
Un épargnant veut placer 10 000 € à la banque. On lui propose 2 types de placement :
a- un placement à 4% en intérêts composés pendant 2 ans.
b- Un placement à 5,5 % en intérêts simples pendant 1 an 6 mois.

Quel est le placement le plus avantageux ?

Voir « CORRIGE-P5 »

Problème du changement d'unité de temps de référence
Activité P2 : ***Le*** taux équivalent – le taux proportionnel
Soit un capital C_0 placé au taux i = 6 %.
1- Quelle est la valeur acquise de C_0 au bout d'un an ?
3- Quelle est la valeur acquise de C_0 au bout d'un an, l'unité de temps étant le mois ?

Corrigé de l'activité :
1- $C_1 = C_0(1+i)^1 = C_0(1+i) = 1{,}06 \times C_0$; i : taux d'intérêt simple ou composé.
2- La période de référence étant le mois, il faut d'abord déterminer le taux mensuel.
  - ***méthode proportionnelle*** : $\mathbf{i_{1/12} = i / 12}$ = 0,06 / 12 = 0,5 % ; d = 12 mois ;
  - *Si $i_{1/12}$ est un taux d'intérêt simple mensuel alors :*

$$C_{1an} = C_0(1 + i_{1/12} \times d) = C_0(1 + (0{,}06/12) \times 12) = 1{,}06 \times C_0 = C_1$$

- *Si $i_{1/12}$ est un taux d'intérêt composé mensuel alors :*

$$C_{1an} = C_0(1+i_{1/12})^{12} = C_0(1+(0{,}06/12))^{12} = 1{,}005^{12} \times C_0 \approx 1{,}0617 \times C_0 \neq C_1$$

- ***méthode taux équivalent :*** $i_{1/12}$ satisfait l'égalité :

$$C_1 = C_0(1+i)^1 = C_0(1+i_{1/12})^{12} \text{ d'où : } i_{1/12} = (1+i)^{1/12} - 1 = (1{,}06)^{1/12} - 1 \approx 0{,}487\%$$

- *Si $i_{1/12}$ est un taux d'intérêt simple mensuel alors :*

$$C_{1an} = C_0(1+i_{1/12} \times d) = C_0(1+\ 0{,}00487 \times 12) = 1{,}05844 \times C_0 \neq C_1$$

- *Si $i_{1/12}$ est un taux d'intérêt composé mensuel alors :*

$$C_{1an} = C_0(1+i_{1/12})^{12} = C_0(1+i) = 1{,}06 \times C_0 = C_1$$

Remarque : dans la plupart des cas pratiques, c'est le taux proportionnel qui est utilisé.

A RETENIR : *transformations taux annuel - taux mensuel*

- Soit i le taux (annuel) connu, alors le taux mensuel correspondant est :
  - Cas taux proportionnel : $\mathbf{i_{1/12} = i / 12}$
  - Cas taux équivalent : $i_{1/12} = (1+i)^{1/12} - 1$
- Soit $i_{1/12}$ le taux mensuel connu, alors le taux annuel correspondant est :
  - Cas taux nominal : $\mathbf{i = 12 \times i_{1/12}}$
  - Cas taux actuariel : $i = (1+i_{1/12})^{12} - 1$

Exercice corrigé :
Etablir les formules de transformations taux annuel - taux trimestriel.

Corrigé de l'exercice :

- Soit i le taux (annuel) connu, alors le taux trimestriel correspondant est :
  - Cas taux proportionnel : $\mathbf{i_{1/4} = i / 4}$
  - Cas taux équivalent : $i_{1/4} = (1+i)^{1/4} - 1$
- Soit $i_{1/4}$ le taux trimestriel connu, alors le taux annuel correspondant est :
  - Cas taux nominal : $\mathbf{i = 4 \times i_{1/4}}$
  - Cas taux actuariel : $i = (1+i_{1/4})^4 - 1$

Exercice P6 :
Vous envisagez d'ouvrir un compte d'épargne dans une banque. Laquelle des trois banques ci-dessous propose le taux d'intérêt le plus avantageux ?
Banque n°1 : 6,7% nominal annuel, composé trimestriellement.
Banque n°2 : 6,65% nominal annuel, composé mensuellement.
Banque n°3 : 6,85% nominal annuel, composé annuellement.

Voir « CORRIGE-P6 »

MAÎTRISE DES BASES DE MATHÉMATIQUES

SÉANCE N° 8

LES INDICES

- Q - LES INDICES ÉLÉMENTAIRES

On veut comparer des valeurs d'une même grandeur dans des situations différentes.
On examinera les valeurs d'une variable statistique, à deux époques différentes pour une même unité statistique.

Activité Q1 :
On considère la production de voitures particulières commerciales : en 1968, on a 1 664 788 voitures et en 1973 on a : 2 866 730 voitures.
L'interprétation est la suivante : on a ici une variable statistique : le nombre de voitures particulières commerciales, et on a deux époques différentes, époque n° 0 (1968) et époque n°1 (1973).

- On dit que la production d'automobiles (commerciales) a été multipliée par 1,722 entre 1968 et 1973.
- On dit que la production d'automobiles (commerciales) s'est accrue de 72,2% entre 1968 et 1973.
- On dit que la production d'automobiles (commerciales) a atteint l'indice $I_{1/0} = 172{,}2$ en 1973 avec une base 100 en 1968.

Activité Q2 :
On considère le nombre de spectateurs de cinémas : en 1967, on a 211 400 000 spectateurs et en 1973 on a 173 600 000 spectateurs.

- Le nombre de spectateurs a été divisé par 1,218 entre 1967 et 1973.
- Le nombre de spectateurs a diminué de 17,9% entre 1967 et 1973.
- Le nombre de spectateurs a atteint l'indice $I_{1/0} = 82{,}1$ en 1973 avec une base 100 en 1964.

A RETENIR :

- Si $r_{1/0} = \dfrac{X\,(\text{situation } 1)}{X\,(\text{situation } 0)} = \dfrac{\text{Valeur finale}}{\text{Valeur initiale}}$ est le rapport entre les valeurs d'une grandeur X dans les situations 1 et 0 alors l'indice élémentaire de X dans la situation 1 en prenant pour base 100 la situation 0 est défini par : $I_{1/0} = 100 \times r_{1/0}$.
- Un indice exprime une variation relative ; il faut donc toujours préciser la situation de référence (sauf s'il n'y a pas d'ambiguïté).

Propriétés :

- L'indice est dit réversible : $\dfrac{I_{1/0}}{100} = \dfrac{100}{I_{0/1}}$
- L'indice est dit transitif transférable : $100 \times I_{2/0} = I_{2/1} \times I_{1/0}$
- L'indice est dit circulaire : $I_{2/1} \times I_{1/0} \times I_{0/2} = 100^3$

<u>**Exercice corrigé**</u> : ***Indice d'un produit ou quotient de variables***

On suppose que le salaire mensuel d'une personne est passé de 1000 **€** à 1500 **€** ; mais en même temps la durée du travail est passée de 40h00 à 35h00. Calculer l'indice du salaire horaire.

Corrigé de l'exercice :

L'indice du salaire est donc égal à : $I^S_{1/0} = \dfrac{1500}{1000} \times 100 = 150.$

L'indice de la durée du travail est égal à : $I^h_{1/0} = \dfrac{35}{40} \times 100 = 87{,}5.$

L'indice du salaire horaire est égal à : $I^{S/h}_{1/0} = \dfrac{\dfrac{1500}{35}}{\dfrac{1000}{40}} \times 100 = 171{,}43.$

On constate que : $I^{S/h}_{1/0} = \dfrac{I^S_{1/0}}{I^h_{1/0}} \times 100 = 171{,}43.$

A RETENIR :

- Le <u>taux d'accroissement</u> relatif de l'instant 1 par rapport à l'instant 0 de X : $\Delta_{1/0} = \dfrac{X_1 - X_0}{X_0} = \dfrac{1}{100}\left(I^X_{1/0} - 100\right)$ (on dit qu'il est égal au rapport de la variation sur la valeur à l'origine ou encore, c'est la valeur finale moins la valeur initiale, le tout divisé par la valeur initiale).
- Le <u>taux d'accroissement relatif en pourcentage</u> de l'instant 1 par rapport à l'instant 0 de X : $\Delta^{\%}_{1/0} = \dfrac{X_1 - X_0}{X_0} \times 100 = I^X_{1/0} - 100.$

Propriété : On a : $X_1 = X_0 + \Delta_{1/0} \times X_0 = (1 + \Delta_{1/0}) \times X_0$

Exercice Q1 :
Un employé saisonnier gagne en juillet 1 200 €.
En août, son salaire a augmenté de 10% et en septembre il a baissé de 10%.
1 - Quel est son salaire en août puis en septembre ?
2 - Calculer les taux d'accroissement entre juillet - août, août - septembre et juillet - septembre ?
3 - Calculer les indices entre juillet - août, août - sept et juillet - sept ?
4 - Calculer le taux entre août et septembre afin que son salaire en septembre soit égal à 1 000 € ?

Voir « CORRIGE-Q1 »

Exercice Q2 :
Compléter :
Si un salarié A gagne 1 000 € et qu'un salarié B perçoit 2 000 €, on peut indifféremment affirmer que B gagne .....% de .... que A ou que A perçoit ....% de .... que B.

Voir « CORRIGE-Q2 »

Exercice Q3 :
Soit le cours de bourse du CAC 40, le jeudi 9 novembre au soir, coté 1866,33 ; on suppose que les variations sur les 4 jours ouvrables suivants sont de : +0,11% ; +0,07% ; -1,21% ; -0,27%.

1- Quelle serait la cotation du titre le mercredi soir ?
2- Quels sont les taux d'accroissements journaliers : i_1 , i_2, i_3 et i_4 ?
3- Calculer le taux équivalent i de i_1 , i_2, i_3 et i_4 qui permet l'obtention de la même cotation le mercredi soir.

Voir « CORRIGE-Q3 »

Exercice Q4 :
Dans le contrat de bail commercial de la société FLORIS, renouvelé début novembre 2001, il est indiqué que le loyer mensuel s'élève à 450 € Hors Taxes / Hors Charges. De plus, celui-ci est révisé chaque année sur la base de l'indice INSEE du coût de la construction, de comparaison du second trimestre 2001 d'une valeur de 1 139.
Sur le site internet de l'INSEE est indiquée la méthode de révision d'un loyer d'habitation.
Ci-dessous un extrait du tableau de l'indice du coût de la construction.

2ème trimestre 2002	1163
1er trimestre 2002	1159
4ème trimestre 2001	1140
3ème trimestre 2001	1145
2ème trimestre 2001	1139
1er trimestre 2001	1125
4ème trimestre 2000	1127
3ème trimestre 2000	1093

1- Au 2nd trimestre 2002, l'indice du coût de la construction est à 1 163. Calculer le taux d'accroissement de l'indice par rapport à l'an dernier.
2- Calculer les moyennes annuelles associées aux 2^{nds} trimestres 2001 et 2002. Ceux sont elles qui interviennent dans la révision des loyers.
3- Calculer pour le 2nd trimestre 2002 la variation annuelle en % des moyennes associées.
4- En déduire le montant du nouveau loyer à partir de novembre 2002.

Voir « CORRIGE-Q4 »

- R - LES INDICES SYNTHÉTIQUES

On observe un ensemble de variables statistiques ; on cherche un indicateur **unique** qui fasse la synthèse de ces évolutions diverses.
Ce genre de problème est souvent posé en économie, dans l'étude des évolutions des prix et des quantités.

<u>Activité R1</u> : ***Indice de Laspeyres des prix***
On étudie la consommation des légumes à partir du tableau ci-contre :

légume	Indice élémentaire des prix	prix unitaire	quantité
salade	$I_{1/0}^{S}$	p_0^S	q_0^S
carotte	$I_{1/0}^{C}$	p_0^C	q_0^C
pomme de terre	$I_{1/0}^{P}$	p_0^P	q_0^P

La dépense (en franc) pour l'année 0 est égale à :

$$D_0^{total} = p_0^S q_0^S + p_0^C q_0^C + p_0^P q_0^P$$

la part de dépense en salade est égale à : $\alpha_0^S = \dfrac{p_0^S q_0^S}{D_0^{total}}$

la part de dépense en carotte est égale à : $\alpha_0^C = \dfrac{p_0^C q_0^C}{D_0^{total}}$

la part de dépense en pomme de terre est égale à : $\alpha_0^P = \dfrac{p_0^P q_0^P}{D_0^{total}}$

Définition : **l'indice de Laspeyres** des prix de l'année n°1 par rapport à l'année n°0 est égale à :

$$L_{1/0}^P = \alpha_0^S I_{1/0}^S + \alpha_0^C I_{1/0}^C + \alpha_0^P I_{1/0}^P .$$

<u>Activité R2</u> : ***Généralisation***
Plus généralement, pour **k** produits, on note :

- p_0^i : le prix unitaire du produit i pour l'année 0
- p_1^i : le prix unitaire du produit i pour l'année 1
- q_0^i : la quantité du produit i consommé pour l'année 0
- q_1^i : la quantité du produit i consommé pour l'année 1.

Alors on a : $\boxed{L_{1/0}^P = \sum_{i=1}^{k} \alpha_0^i \, I_{1/0}^i \quad \text{avec} \quad \alpha_0^i = \dfrac{p_0^i q_0^i}{\sum_{j=1}^{k} p_0^j q_0^j}}$

On peut encore écrire cette expression de la façon suivante :

$$L^P_{1/0} = 100 \times \sum_{i=1}^{k} \frac{p^i_0 q^i_0}{\sum_{j=1}^{k} p^j_0 q^j_0} \times \frac{p^i_1}{p^i_0} = \boxed{100 \times \frac{\sum_{i=1}^{k} p^i_1 q^i_0}{\sum_{j=1}^{k} p^j_0 q^j_0} = L^P_{1/0}}$$

car : $I^i_{1/0} = 100 \times \dfrac{p^i_1}{p^i_0}$.

Activité R3 :
On considère le panier de M. Dupont contenant des unités de pain (P) et de vin (V). On présente le schéma suivant :

	Année 0	inflation	Année 1
P	$p^P_0 q^P_0 = 30$ euros	10%	$p^P_1 q^P_0 = 33$ euros
V	$p^V_0 q^V_0 = 70$ euros	20%	$p^V_1 q^V_0 = 84$ euros
	100 €		117 €

L'indice de Laspeyres des prix de base 100 est :

$$117 = 100 \times \frac{117}{100} = 100 \times \frac{33 + 84}{30 + 70} = 100 \times \frac{30 \times 1{,}1 + 70 \times 1{,}2}{30 + 70}$$

Donc, en généralisant l'indice de Laspeyres des prix est égal à :

$$100 \times \frac{\sum_i \cancel{p^i_0} q^i_0 \dfrac{p^i_1}{\cancel{p^i_0}}}{\sum_i p^i_0 q^i_0} = 100 \times \frac{\sum_i p^i_1 q^i_0}{\sum_i p^i_0 q^i_0} = L^p_{1/0}$$

et **on retient** : $L^p_{1/0} = 100 \times \dfrac{\text{Valeur d' aujourd' hui du panier d' hier}}{\text{Valeur d' hier du panier d' hier}}$

(« aujourd'hui » correspond à l'époque 1 et « hier », à l'époque 0.)

Activité R4 : ***Indice de Laspeyres des quantités***

Définition : si $I^i_{1/0} = 100 \times \dfrac{q^i_1}{q^i_0}$ désigne l'indice élémentaire des quantités pour le produit i, l'indice de Laspeyres des quantités est défini par :

$$L^q_{1/0} = \sum_{i=1}^{k} \alpha^i_0 I^i_{1/0} = 100 \times \frac{\sum_{i=1}^{k} p^i_0 q^i_1}{\sum_{i=1}^{k} p^i_0 q^i_0}$$

On retient : $L^q_{1/0} = 100 \times \dfrac{\text{Valeur d' hier du panier d' aujourd' hui}}{\text{Valeur d' hier du panier d' hier}}$

(« aujourd'hui » correspond à l'époque 1 et « hier », à l'époque 0.)

Remarque : L'indice est une moyenne pondérée et dans les cas ci-dessus, les pondérations retenues sont celles correspondant à l'année n°0.

<u>Activité R5</u> : ***Indice de Paasche des prix***

Définition : **- L'indice de Paasche** pour les prix est défini par : $P^p_{1/0} = 100 \times \dfrac{\sum_{i=1}^{k} p_1^i q_1^i}{\sum_{i=1}^{k} p_0^i q_1^i}$

On retient : $P^p_{1/0} = 100 \times \dfrac{\text{Valeur d' aujourd' hui du panier d' aujourd' hui}}{\text{Valeur d' hier du panier aujourd' hui}}$

(« aujourd'hui » correspond à l'époque 1 et « hier », à l'époque 0.)

- L'indice de Paasche pour les quantités est défini par : $P^q_{1/0} = 100 \times \dfrac{\sum_{i=1}^{k} p_1^i q_1^i}{\sum_{i=1}^{k} p_1^i q_0^i}$

On retient : $P^p_{1/0} = 100 \times \dfrac{\text{Valeur d' aujourd' hui du panier d' aujourd' hui}}{\text{Valeur d' aujourd' hui du panier d' hier}}$

(« aujourd'hui » correspond à l'époque 1 et « hier », à l'époque 0.)

<u>Activité R6</u> : ***Propriétés***

- on a : $L^p_{1/0} = \dfrac{100^2}{P^p_{0/1}}$ et $L^q_{1/0} = \dfrac{100^2}{P^q_{0/1}}$

- ces indices synthétiques sont non réversibles et non transférables.

Définition : L'indice chaîne de Laspeyres (des prix) base 100 entre les époques n°0 et n° n est défini par :

$$\mathcal{L}^p_{n/0} = \frac{1}{100^{n-1}} L^p_{n/n-1} \times L^p_{n-1/n-2} \times \ldots \times L^p_{1/0}$$

Remarque : On a à comparer : $L^p_{n/0}$ et $\mathcal{L}^p_{n/0}$. Le premier indice ne fait intervenir que les prix et quantités sur deux époques alors que le second prend en considération ces mêmes éléments, mais cette fois-ci, sur n+1 époques.

<u>Exercice R1</u> : La société MATECH fabrique des réveils sophistiqués. Son produit classique est vendu au prix de 100 € en l'an 2000. Le détail du prix est présenté dans le tableau ci-dessous. En 2002, le produit et les conditions de travail ont évolué, comme dans le tableau ci-dessous.

Répartition du prix	**Pourcentage en 2000**	**Variations 2002 / 2000**
Coûts variables de production	25%	+ 2%
Coûts fixes de production	40%	+ 5%
Coûts administration	25%	+ 10%
Marge bénéficiaire	10%	- 3%

Quel prix proposez-vous pour le réveil en 2002 ?

<u>Voir « CORRIGE-R1 »</u>

MAÎTRISE DES BASES DE MATHÉMATIQUES

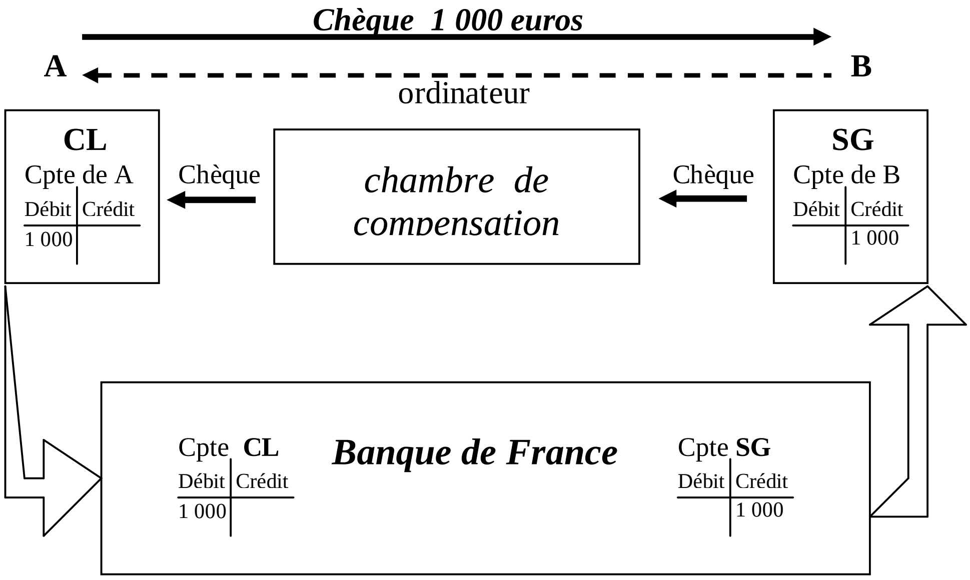
SÉANCE N° 9

GESTION D'UN BUDGET

Rappelons les notions portant sur le compte bancaire et son fonctionnement.

- ***Le chèque*** : c'est le titre de paiement par lequel une personne, appelée « tireur », donne l'ordre à une banque ou à un établissement assimilé, appelé « tiré », de payer une certaine somme à elle-même ou un tiers appelé « bénéficiaire ».
- ***La carte bancaire*** : elle permet de retirer de l'argent et de connaître le solde de son compte grâce aux guichets automatiques de banques ou distributeurs de billets. Elle permet aussi d'effectuer des paiements chez certains commerçants. Notons qu'il est possible au moment où l'on reçoit sa carte de demander à son banquier que les sommes obtenues par la carte bancaire soient retirées du compte à chaque utilisation de la carte ou bien retirées uniquement en fin de mois.
- ***Le compte bancaire*** : c'est un compte ouvert par une banque au nom d'un de ses clients, et sur lequel sont portées toutes les opérations effectuées par ce client dans ses rapports avec la banque.
- ***Crédit sur un compte*** : c'est la partie d'un compte où sont inscrites les sommes remises à celui à qui appartient le compte.
- ***Débit sur un compte*** : c'est la partie d'un compte où figurent les sommes retirées à l'avoir du compte par la banque, c'est-à-dire payées par le titulaire du compte.
- ***Le solde*** : c'est la différence entre le débit et le crédit. Si le solde est positif, c'est-à-dire s'il y a de l'argent sur le compte, le solde est enregistré dans la colonne « crédit » et prend le nom de créditeur. Si le solde est négatif, il est enregistré dans la colonne « débit ». Cela signifie qu'il manque de l'argent sur le compte d'un montant égal au solde. Ce solde prend le nom de solde débiteur. Le compte est dit « à découvert ». Tous les 15 jours ou tous les mois suivant les banques, un relevé de compte est adressé au client qui retrace toutes les écritures passées pendant la période sur le compte.
- ***Les agios*** : ce sont des retenues effectuées par le banquier en rémunération des frais provoqués par le découvert du compte. Le découvert est assimilé à un prêt d'argent égal au solde débiteur et sur lequel la banque touche des intérêts.
  Si un compte est fréquemment débiteur d'une somme trop importante, le titulaire du compte se voit « interdit de chéquier ». Son nom est enregistré à la Banque de France. Il ne lui est plus possible de se faire ouvrir un compte dans la banque ni d'avoir un chéquier.
  L'importance d'un découvert toléré par le banquier est proportionnelle aux revenus du titulaire et fonction des relations que le client entretient avec son banquier.

- ***<u>Le circuit du chèque</u>*** : chaque fois que l'on fait un chèque, on déclenche sans le savoir tout un processus qui aboutit au paiement du bénéficiaire et au débit de son propre compte.
  Par exemple, une transaction entre deux banques est décrite de la façon suivante : un individu A du « Crédit Lyonnais » (**CL**) achète à un individu B de la « Société Générale » (**SG**) un ordinateur d'un montant de 1 000 €, <u>par chèque</u>. L'individu B va donner le chèque à sa banque. La « Société Générale » donne le chèque au « Crédit Lyonnais » dans une « chambre de compensation », c'est-à-dire le lieu où les banquiers s'échangent leurs chèques. Le Crédit Lyonnais débite le compte de A en lui retirant les 1 000 € de son compte, et donne à la Société Générale ces 1 000 € par l'intermédiaire d'un compte à la Banque de France. La Société Générale va ajouter 1 000 € au compte de B en créditant son compte.



  Il n'y a effectivement paiement qu'à partir du moment où le compte de A est débité et le compte de B crédité.
  Tout ce processus demande un certain temps et les banques jouent sur les dates de débit et de crédit des comptes pour se rémunérer.

<u>Les dates d'opération et de valeur</u> : Les comptes sont débités ou crédités à des dates qui sont différentes des dates de dépôts de chèques à la banque, d'où les notions de « date de valeur » et « date d'opération ».

- ***<u>Date d'opération</u>*** : c'est le plus souvent la date à laquelle l'opération est effectuée au guichet de la banque.
- ***<u>Date de valeur</u>*** : c'est la date à laquelle le compte est effectivement crédité ou débité.
  Les opérations de **débit** sont affectées d'une date de valeur **antérieure** à la date d'opération (moins 2 jours calendaires par rapport à la date d'opération).
  Les opérations de **crédit** sont affectées d'une date de valeur **postérieure** à la date d'opération (si la transaction présente deux banques dans le même département, la date de valeur est égale à la date d'opération plus 2 jours ouvrés ; si la transaction présente deux banques dans des départements différents, la date de valeur est égale à la date d'opération plus 5 jours ouvrés).

- Les **jours calendaires** sont les jours du calendrier y compris les samedis et dimanches.
- Les **jours ouvrés** sont les jours du calendrier sauf les samedis et dimanches.

- S - GESTION : BUDGET PERSONNEL

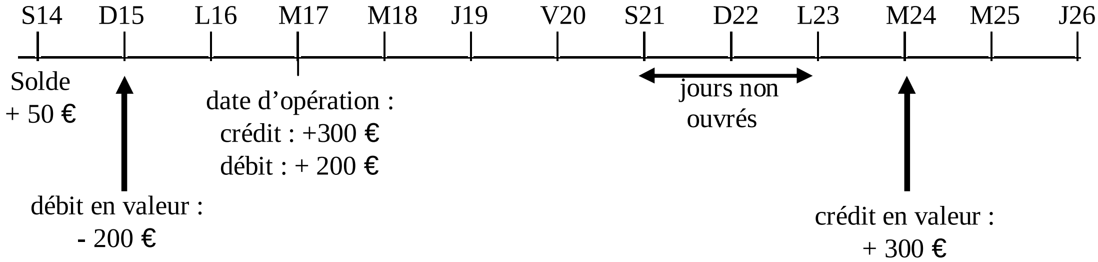
<u>Exercice corrigé</u> : ***Calcul des agios avec prise en compte des dates de valeur***

Le samedi 14 septembre, un compte accuse un solde créditeur de 50 €.

Le mardi 17 septembre, le titulaire du compte achète un objet qu'il paie 200 €. Son chèque est immédiatement déposé à la banque par le vendeur de l'objet. Le même jour, il reçoit et dépose à sa banque un chèque de 300 € provenant d'une banque extérieure au département.

1- Le compte est-il à découvert en date d'opération ?
2- Le compte est-il à découvert en date de valeur, et pour combien de temps ?
3- Sachant que la banque applique sur les découverts un taux d'intérêt de 20 %, à combien s'élèveront les agios ?

Corrigé de l'exercice :



1- *<u>Situation du compte en date d'opération</u>* :

(solde + crédit) - débit = (50 + 300) – 200 = 150 €

En date d'opération le compte n'est théoriquement pas à découvert : il dispose d'un solde créditeur de 150 €.

2- *<u>En tenant compte des dates de valeur, la situation du compte prend un tout autre aspect</u>* :

Signé le 17 septembre, le chèque de 200 € est débité en valeur le 15 septembre.

Posé à la banque le 17 septembre, le chèque de 300 € est crédité en valeur le 24 septembre.

Le compte est donc à découvert du 15 au 24 septembre, soit 9 jours, de :

(50 – 200) = -150 €

Il redevient créditeur le 24 septembre de : (-150 + 300) = +150 €

3- *<u>Calcul des agios</u>* :

- taux d'intérêt : 20 %
- Agios à payer : $150 \times 0{,}20 \times \frac{9}{360} = 0{,}75$ €

La banque retirera donc le 24 septembre du compte 0,75 € d'agios.

<u>Comment établir son budget ?</u>

- La prévision d'un budget exige une double connaissance ; celle des revenus futurs ainsi que celle des dépenses à venir.
- Les revenus sont la plupart du temps mensuels ; il faut ajouter des revenus occasionnels souvent aléatoires comme des remboursements ou indemnités diverses.
- Les dépenses obligatoires sont soit périodiques, tous les mois, soit ponctuelles.
- On tiendra son compte à l'aide d'un tableau.

<u>Activité S1</u> : ***Tenue d'un compte***

Un jeune cadre a un revenu de 2 000 € par mois. Ses dépenses mensuelles pour le 2ème semestre sont les suivantes :

- nourriture : 240 €
- logement : 500 €
- impôts : 10 %
- remboursement de crédit : 270 €
- essence : 70 €
- sorties : 250 €
- argent de poche : 200 €

Les dépenses ponctuelles sont :

- impôts locaux : 550 € au mois de novembre
- assurance voiture : 450 € en septembre

Le solde bancaire au premier juillet est créditeur de 750 €.

Etablir le tableau du budget prévisionnel.

Corrigé de l'activité :

		Libellé	JUIL	AOU	SEP	OCT	NOV	DEC
		Solde début du mois	750	1020	1290	1110	1380	1100
		REVENUS	2000	2000	2000	2000	2000	2000
		Argent disponible	2750	3020	3290	3110	3380	3100
DEPENSES	OBLIGATOIRES	MENSUELLES						
		Nourriture	240					
		logement	500					
		Impôts	200					
		Essence	70					
		TOTAL	1010	1010	1010	1010	1010	1010
		PONCTUELLES						
		Assurance			450			
		Impôts locaux					550	
		TOTAL			450		550	
		TOTAL OBLIGATOIRES	1010	1010	1460	1010	1560	1010
	AUTRES	Remboursement crédit	270					
		Argent de poche	200					
		Sorties	250					
		TOTAL AUTRES	720	720	720	720	720	720
		TOTAL DEPENSES	1730	1730	2180	1730	2280	1730
		SOLDE FIN DE MOIS	1020	1290	1110	1380	1100	1370

A l'aide de ce tableau, on s'aperçoit que si, pour un achat qu'il envisagerait, le jeune cadre veut prendre un crédit supérieur à 1 200 €, au mois de septembre son solde sera débiteur.

<u>Activité S2</u> : ***Tenue à jour du compte bancaire***

Ci-dessous un exemple de tableau présentant un relevé de compte bancaire :

Corrigé de l'activité :

Ci-dessous un exemple de tableau pour le mois de janvier.

Date Emission	Numéro chèque	LIBELLE	MONTANT		SOLDE	Date Retrait
			DEBIT	CREDIT		
		Solde Décembre		25	25	
02.01.02		Virement salaire		1800	1825	
02.01.02	45.98562	Tickets restaurant	70		1755	10.01.02
02.01.02	Virem. auto.	Remboursement S.S.		25	1780	
03.01.02		Retrait distribut.	60		1720	07.01.02
05.01.02	45.98563	Essence	30		1690	08.01.02
06.01.02	45.98564	Restaurant	45		1645	08.01.02
06.01.02	45.98565	Loyer	500		1145	09.01.02
07.01.02	45.98566	EDF-GDF	50		1095	15.01.02
09.01.02	45.98567	Téléphone	75		1020	15.01.02
24.01.02	Virem. auto.	Impôts	160		240	
27.01.02	Virem. auto.	Crédit voiture	150		90	
28.01.02	Virem. auto.	Assurance Vie	60		30	
TOTAUX			1200	1850	30	

<u>Exercice S1 :</u>

Un jeune cadre a un revenu mensuel de 1 700 €. Ses dépenses mensuelles sont pour les mois de juillet à décembre :

- logement : 400 € - voiture : - essence : 50 €
- nourriture : 260 € - assurance : 400 € (le 15 septembre)
- habillement : 80 € - entretien - réparation : 200 € (le 15 juillet)
- impôts : 150 €
- sorties et argent de poche : 250 €
- remboursement d'un crédit : 270 € (jusqu'à fin octobre).

Le 1er juillet, le compte bancaire du jeune cadre est créditeur de 200 €.

3- A partir de quel mois pourra-t-il faire un achat de 350 €.
4- Même question s'il réduit son argent de poche mensuel de 50 €.
5- Quel est alors dans chaque cas le solde du compte bancaire à la fin du mois de décembre ?

<u>Voir « CORRIGE-S1 »</u>

Exercice S2 :
Pour un achat, un salarié a besoin de 1 500 €. On lui propose un prêt à 1,8% d'intérêts (intérêts composés) par mois. Le tout, intérêts et capital sera remboursé globalement dans un an.

1- Quel est le montant des intérêts à payer et le taux annuel ?
2- Quelle est la valeur actualisée du remboursement, sachant qu'il y a une inflation de 5% ?
3- Par ailleurs, on lui propose un prêt de 1 500 € à un taux de annuel de 20% (intérêts simples), le capital est remboursé au bout de 2 ans, les intérêts sont payés au bout de chaque année et l'inflation reste constante.
   Quelle est la valeur actualisée du 2ème remboursement ?
4- Ce salarié gagne 1 200 € par mois. Il a comptabilisé ses dépenses mensuelles comme suit :
   500 € = loyer, téléphone, électricité ;
   200 € = nourriture ;
   220 € = habillement, sortie ;
   150 € = remboursement d'un emprunt déjà contracté.

Sachant que son salaire reste stable, sur quel prêt se reporter (justifiez votre réponse) ?

Voir « CORRIGE-S2 »

- T - COMPTE COMMERCIAL

La tenue d'un compte courant commercial consiste à enregistrer les opérations comptables quotidiennes en tenant compte des intérêts produits entre les dates d'enregistrement comptables. Nous proposons 2 méthodes standard de calculs d'intérêt.

Activité T1 : ***Méthode directe***

Les opérations comptables du compte de la société Durand sont enregistrées pendant la période du 8 avril au 7 mai 2002.

- le 8 avril, le solde est créditeur : 13 720 €
- le 12 avril, un chèque de 25 920 € d'un client est encaissé
- le 19 avril, un virement d'achat de 13 720 € est effectué
- le 30 avril, un encaissement d'une traite à 29 000 €
- le 6 mai, remboursement d'une dette de 9 150 €.

La banque qui gère le compte de la société Durand utilise un **taux réciproque** d'intérêts à 4% ; les comptes sont arrêtés tous les 7 du mois.

- Représenter le diagramme des flux
- Dresser le compte de la société Durand par la **méthode directe**

On rappelle la formule donnant les intérêts à la date de calcul t_f.

$$\boxed{I = \sum_{j=1}^{k} F_j \times \frac{n_j}{360} \times i}$$

i : taux réciproque d'intérêt
k : le nombre total de flux
F_j : le montant algébrique du flux j ;
F_1 : est le flux du solde à l'origine de la période
$n_j = t_f - t_j$: durée en jours entre les dates de calcul et du flux j .

Corrigé de l'activité :
Appliquer la formule des intérêts revient à compléter le tableau ci-après pour chaque opération, puis à multiplier le solde des nombres par le taux d'intérêt et enfin diviser le résultat par 360.

Opération	Débit	Crédit	Date de Valeur	jours	Nombres Débit	Nombres Crédit
Solde créditeur		13 720	08/04	29		397 880
Encaissement chèque						
Virement d'achat						
Encaissement traite						
Remboursement dette						
Totaux						
Balance						
Intérêts acquis au 7 mai		**I** ≈				
Solde au 7 mai						

Voir « CORRIGE Activité-T1 »

Activité T2 : ***Méthode Hambourgeoise***
On reprend l'énoncé de l'activité T1.
- Dresser le compte de la société Durand par la **méthode Hambourgeoise**

On rappelle la formule donnant les intérêts à la date de calcul t_f :

$$\boxed{I = \sum_{j=1}^{k} \left(\sum_{l=1}^{j} F_l \right) \times \left(\frac{t_{j+1} - t_j}{360} \right) \times i}$$

i : taux d'intérêt ; k : le nombre total de flux ;
F_j : le montant algébrique du flux j ;
F_1 : est le flux du solde à l'origine de la période ;
$t_{k+1} = t_f$: date de calcul.

Opération	Débit	Crédit	Solde Débit	Solde Crédit	Date de Valeur	jours	Nombres Débit	Nombres Crédit
Solde créditeur		13 720		13 720	08/04	4		54 880
Encaissement chèque		25 920		39 640	12/04			
Virement d'achat								
Encaissement traite								
Remboursement dette								
Totaux								
Balance								
Intérêts acquis au 7 mai				**I**≈				
Solde au 7 mai								

Remarque : - Cette méthode de gestion comptable est robuste ; en cas d'erreur sur une date associée à un flux, le calcul de l'intérêt se corrige aisément en changeant un terme de la somme.
- Cette méthode est assez souple d'utilisation car on peut arrêter le compte à une date quelconque sans recommencer tous les calculs.

Voir « CORRIGE Activité-T2 »

MAÎTRISE DES BASES DE MATHÉMATIQUES

SÉANCE N° 10

- U - CONTRÔLE N°2

Exercice U1 : Mouvement uniforme ***(6 points)***
Un train omnibus part de Paris à 8 h 45 mn. Il roule à une vitesse moyenne de 65 km / h. Un train rapide part de Paris sur la même voie à 10 h.

1- Quelle est la vitesse moyenne du rapide, sachant que le premier train est garé pour laisser passer le second à 143 km de Paris ?
2- Quelle est la longueur du rapide sachant qu'il passe en 2,4 s devant un observateur immobile ?
3- Quelle est la longueur de l'omnibus sachant que l'omnibus étant à l'arrêt, le rapide le dépasse en 7 s ?
4- En fait le premier train roule en moyenne à 70 km / h en dehors des arrêts. Sachant que le conducteur du train indique aux passagers qu'il y a 2 mn d'arrêt à chaque station, combien y a-t-il eu d'arrêts avant que les deux trains se rejoignent ? Calculer le temps moyen de la pause.

(barème : 1 : 2 points ; 2 : 1 point ; 3 : 1 point ; 4 : 2 points)

Exercice U2 : Intérêts composés ***(3 points)***
Une somme a été placée à 7,5% pendant 5 ans en intérêts composés.

4- Au bout de 3 ans le capital a rapporté 1 000 €. Quelle était la somme placée initialement ?
5- Quel est le nouveau capital au bout des 5 ans ?

(barème : 1 : 1,5 points ; 2 : 1,5 points)

Exercice U3 : Placement d'un capital pour la création d'une entreprise ***(5 points)***
M. Durand place sur son livret de Caisse d'Epargne la somme de 5 000 €, qui lui rapporte des intérêts composés au taux de 6,5 %. M. Durand aura besoin dans 8 ans d'une importante somme d'argent pour créer sa société.

1- Quel sera le montant à sa disposition sachant que nous sommes le 1er janvier 2002?
2- S'il retire 7 000 € (capital de sa société) au bout des 8 ans, quel pourcentage de son capital laisse-t-il sur son livret le 1er janvier 2010 ?

3- Pour créer sa société il aura besoin avec les frais divers de 8 000 €. Quand est-ce qu'il pourra réaliser son projet ? Pour calculer le temps, on exprimera la durée en année commerciale.

(barème : 1 : 1,5 points ; 2 : 1 point ; 3 : 2,5 points)

Exercice U4 : Tableau prévisionnel du budget ***(6 points)***
Un couple a un revenu mensuel de 2 400 €. Les prévisions des dépenses mensuelles pour le premier semestre sont :
- nourriture : 400 €
- impôts : 240 €
- essence : 160 €
- loyer : 360 €
- argent de poche et sorties : 320 €
- habillement : 120 €

Les dépenses ponctuelles sont :
- redevance télé : 230 € (janvier)
- révision de la voiture : 178 € (mars)
- soins dentaires : 686 € (en avril)
- vacances de ski (15j) : 2 200 € tout compris (en février)

Pour le mois de février seulement, le couple prévoit d'augmenter globalement le poste d'argent de poche de 160 €, mais de diminuer de moitié leurs dépenses en nourriture et essence.
Leur solde bancaire début janvier est de 1 000 €.
1- Calculer le solde bancaire fin juin (réaliser un tableau).

Le couple envisage un achat de 2 300 € selon 2 modalités de paiement : au comptant ou avec un crédit en 6 mensualités de 399 €.
2- Selon chaque proposition, à partir de quel mois pourra-t-il effectuer son achat et quel sera alors le solde bancaire.

(barème : 1 : 4 points ; 2 : 2 points)

MAÎTRISE DES BASES DE MATHÉMATIQUES

SÉANCE N° 11

- V - VARIABLES STATISTIQUES À UN CARACTÈRE

♦ ***Population ou univers*** : ensemble de référence sur lequel porte l'étude. Ce peut être une population vivante (humaine ou animale ...), mais ce peut être aussi un ensemble d'objets (voitures, appartements, téléviseurs...). La notation souvent utilisée est : Ω. (*ex* : les chômeurs en début de mois.) On considérera en général une population finie (ou une population de taille finie) plutôt qu'une population infinie.

♦ ***Individu*** ou ***unité statistique*** : élément de la population. La notation souvent utilisée est : ω et on a : $\omega \in \Omega$ (« ω appartient à Ω »).

♦ ***Caractère statistique*** : aspect ou propriété d'une population sur laquelle porte l'étude. Ce caractère peut être qualitatif (non mesurable) (*ex* : couleur des cheveux, profession, nationalité, sexe) ou quantitatif (mesurable) (*ex* : la taille, le poids, l'âge, la température, etc…).

♦ Lorsque le caractère statistique est quantitatif (on dit aussi : variable statistique), il peut être **discret** s'il prend des valeurs isolées (*ex* : nombre d'enfants, nombre de pièces d'un appartement...) ou **continu** si, à l'intérieur d'un intervalle réel donné, il peut prendre toute valeur (*ex* : la taille ou le poids d'un individu, revenu mensuel, le bénéfice d'une entreprise,...). **Dans ce dernier cas, on a l'habitude de regrouper les données en classes disjointes ; on obtient alors une variable statistique continue classée**.

♦ **Modalités** du caractère A : toutes les manifestations possibles de A. Les modalités sont exhaustives et incompatibles c-à-d. chaque individu de toute la population produit une modalité unique du caractère A.
(*ex* : Si A est le caractère : couleur des cheveux, les modalités associées sont par exemple, brune, blonde, châtain, rousse ; si A est le caractère poids de la personne, les modalités sont par exemple les nombres réels.)

Activité V1 : Tableau statistique - Représentation graphique.

On considère la population des élèves d'une classe Ω, de taille n=24.

Soit X la variable statistique correspondant au poids des élèves. On suppose que l'on dispose des données présentées ci-contre :

NOM	poids (kg)
Olivier	67
Cynthia	50
Kamal	68
Sébastien	82
Emeline	53
Benoit	66
Quentin	70
Anziz	59
Yannick	64
Grégory	74
Grégory 2	75
Maryline	54
Samuel	79
Youssef	63
Edouard	66
Pierre-Adrien	68
Corine	58
Stéphane 2	73
Virgil	66
Benoit 2	67
Andry	59
Ursula	55
Elodie	52
Marie	59

1- Etablir le tableau statistique, c-à-d un tableau comportant au moins deux colonnes : la première étant les modalités de X et la seconde au choix, les fréquences absolues ou les fréquences relatives.

2- On choisit de regrouper les données en 4 classes d'intervalles : C_1=[50,60[; C_2=[60,70[; C_3=[70,80[; C_4=[80,90] et on choisit d'adopter le point de vue de la variable continue classée. Etablir le tableau statistique.

3- Dans le cas du regroupement des données en des classes, présenter la distribution de la variable X dans les cas suivants :
   - a- visualisation rapide pour une appréciation qualitative
   - b- visualisation rapide avec une appréciation quantitative
   - c- examen détaillé des pondérations de chaque classe.

4- Dans le cas du regroupement des données en des classes,
   - a- présenter l'histogramme de la variable X
   - b- déterminer le (ou les) mode(s) de X, la (ou les) classe(s) où l'effectif est le plus important.

5- Dans le cas discret, calculez la moyenne de X, un paramètre de centrage.

6- Dans le cas discret, calculez l'ensemble des valeurs médianes de X, c-à-d. l'ensemble des valeurs centrales de X qui partagent la population en deux exactement, et le représentant central de cet ensemble.

7- Dans le cas discret, calculez les paramètres de dispersion suivants :
   - a- l'étendue de X, différence entre les valeurs extrêmes
   - b- l'écart interquartile de X, différence entre les $3^{ème}$ et 1^{er} quartiles
   - c- la variance de X, un paramètre de dispersion autour de la moyenne, c-à-d. la moyenne des écarts quadratique par rapport à la moyenne.

Corrigé de l'activité :

1- <u>Tableau statistique</u> :

modalités de X	Fréquences absolues	Fréquences relatives
50	1	1/24
52	1	1/24
53	1	1/24
54	1	1/24
55	1	1/24
58	1	1/24
59	3	1/8
63	1	1/24
64	1	1/24
66	3	1/8
67	2	1/12
68	2	1/12
70	1	1/24
73	1	1/24
74	1	1/24
75	1	1/24
79	1	1/24
82	1	1/24
TOTAL	**24**	**1**

- Les fréquences absolues de X sont les effectifs associés aux modalités de X, on les note : n_i, pour $1 \le i \le k$ où $k = 18$ est le nombre de modalités de X.
- Les fréquences relatives de X sont les proportions associées aux modalités de X, on les note : f_i, pour $1 \le i \le k$ où $k = 18$ est le nombre de modalités de X. On a la formule suivante (n=24) :

$$\boxed{f_i = \frac{n_i}{n},\ 1 \le i \le k}$$

2- Tableau statistique :

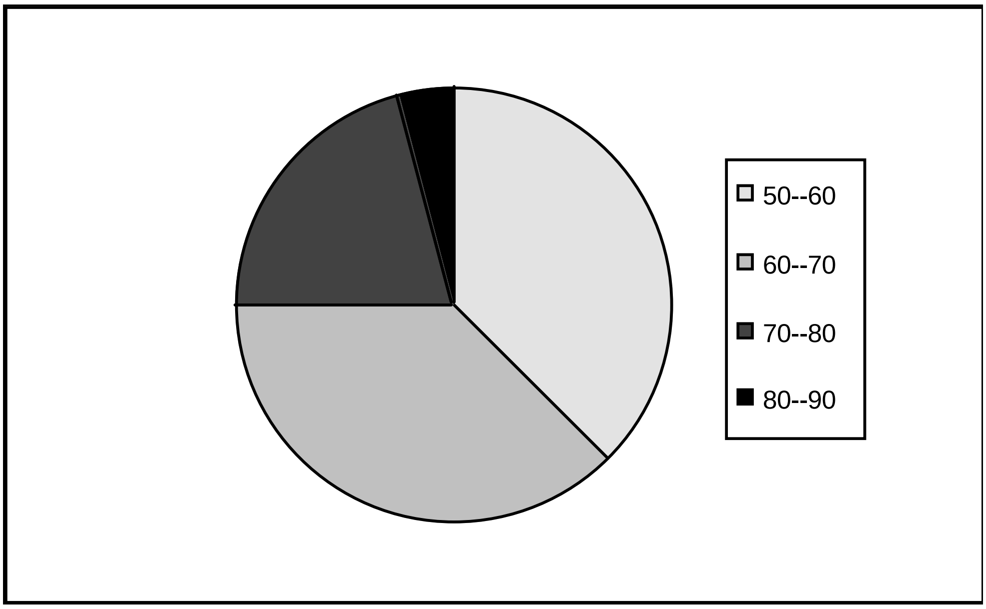
modalités de X	Fréquences absolues	Fréquences relatives
50--60	9	9/24
60--70	9	9/24
70--80	5	5/24
80--90	1	1/24
TOTAL	**24**	**1**

- Les fréquences absolues de X sont les effectifs associés aux modalités de X, on les note : n_i, pour $1 \leq i \leq k$ où $k = 4$ est le nombre de modalités de X.
- Les fréquences relatives de X sont les proportions associées aux modalités de X, on les note : f_i, pour $1 \leq i \leq k$ où $k = 4$ est le nombre de modalités de X. On a la formule suivante (n=24) :

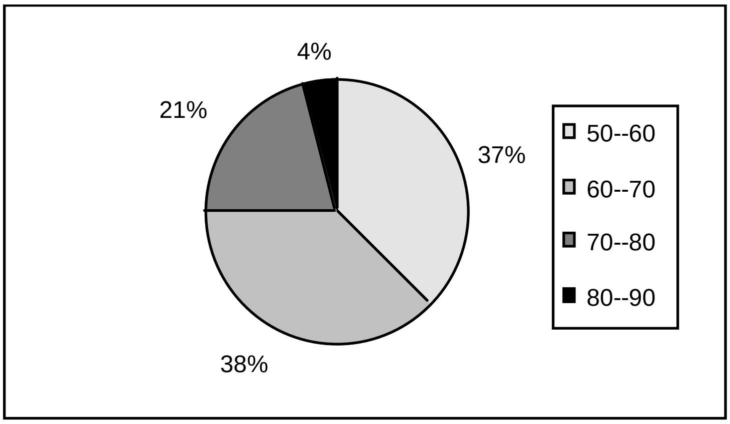
$$\boxed{f_i = \frac{n_i}{n},\ 1 \leq i \leq k}$$

3- On considère la variable X dans le cas continu-classé.

a- ***Représentation en camembert*** :



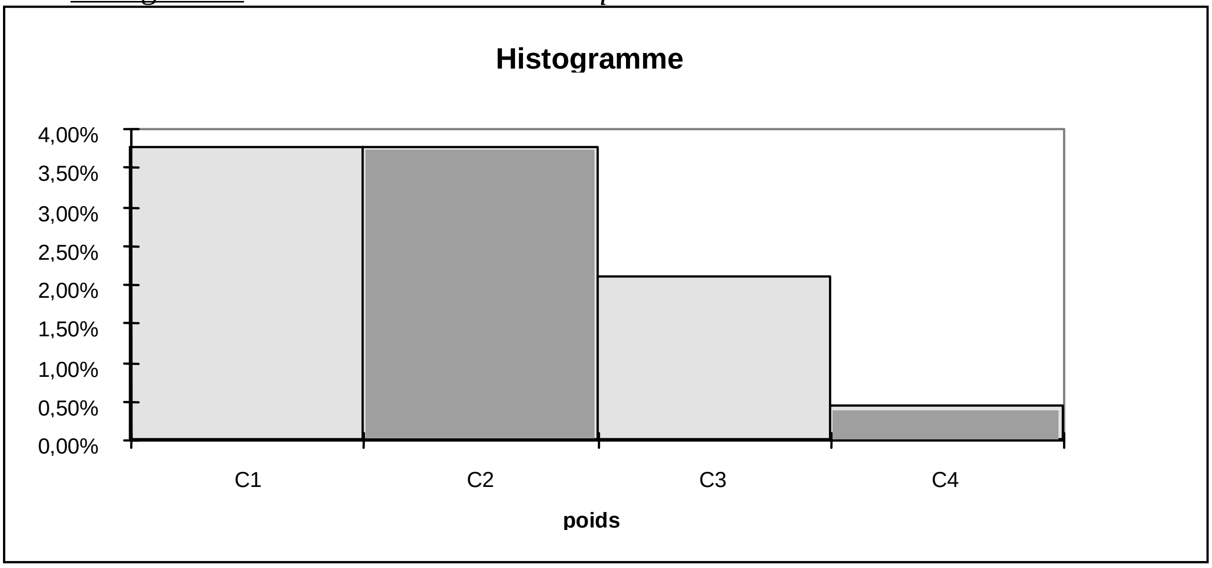
b- ***Représentation en camembert plus les pourcentages***:



c- ***Tableau statistique avec les pourcentages*** :

50--60	37,50%
60--70	37,50%
70--80	20,83%
80--90	4,17%

4- a- Histogramme : *cas de la variable statistique continue classée* :



Nous avons utilisé, pour calculer les hauteurs, la formule : $h_i = \frac{f_i}{l_i} \quad (1 \leq i \leq 4)$ où l_i est la longueur de chaque classe C_i. Nous obtenons le tableau suivant :

modalités de X	Fréquences relatives	h_i
[50 ; 60[	9/24	9/24 ÷ 10 = 9/240
[60 ; 70[	9/24	9/24 ÷ 10 = 9/240
[70 ; 80[	5/24	5/24 ÷ 10 = 5/240
[80 ; 90]	1/24	1/24 ÷ 10 = 1/240
TOTAL	**1**	

b- Nous obtenons ici deux classes modales : C_1 et C_2 ; en effet, les fréquences relatives sont les plus importantes ou les aires des rectangles de l'histogramme sont les plus importantes.

5- Moyenne : *cas de la variable discrète*

$$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{1}{24}(67 + 50 + \cdots 52 + 59) \approx 64{,}46 \qquad (n=24)$$

6- Médiane : *cas de la variable discrète*

On range les valeurs de X, de la façon suivante :

$r_1=50$; $r_2=52$; $r_3=53$; $r_4=54$; $r_5=55$; $r_6=58$; $r_7=59$; $r_8=59$; $r_9=59$; $r_{10}=63$; $r_{11}=64$; $r_{12}=66$; $r_{13}=66$; $r_{14}=66$; $r_{15}=67$; $r_{16}=67$; $r_{17}=68$; $r_{18}=68$; $r_{19}=70$; $r_{20}=73$; $r_{21}=74$; $r_{22}=75$; $r_{23}=79$; $r_{24}=82$.

n = 24 étant pair, on a : $r_{12}=66=r_{13}$ donc on obtient une valeur médiane unique : **66**.

7- a- <u>Etendue</u> : *cas de la variable discrète*

l'étendue est définie par : $\sup_{1\le i\le n} x_i - \inf_{1\le i\le n} x_i = 82 - 50 = 32$

b- <u>Ecart interquartile</u> : *cas de la variable discrète*

- Un 1er quartile Q_1 est une valeur particulière de position de X, elle partage la population en deux, 25% des valeurs de X sont inférieures à Q_1 et 75% des valeurs de X sont supérieures à Q_1.

n = 24 étant pair, on a : $r_6 = 58$ et $r_7 = 59$ donc on obtient l'intervalle]58 ; 59[dont un représentant est le centre de l'intervalle : $Q_1 = 58,5$.

- Un 3ème quartile Q_3 est une valeur particulière de position de X, elle partage la population en deux, 75% des valeurs de X sont inférieures à Q_3 et 25% des valeurs de X sont supérieures à Q_3.

n = 24 étant pair, on a : $r_{18} = 68$ et $r_{19} = 70$ donc on obtient l'intervalle]68 ; 70[dont un représentant est le centre de l'intervalle : $Q_3 = 69$.

On obtient l'écart interquartile : $Q_3 - Q_1 = 69 – 58,5 =$ **10,5**

c- <u>Variance</u> : *cas de la variable discrète*

C'est le carré de l'écart-type : σ_X

$$\sigma_X^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{X})^2 \approx \frac{1}{24}\left((67-64,46)^2 + (50-64,46)^2 + \cdots + (59-64,46)^2\right) \approx 70,75$$

La variance est le paramètre de dispersion le plus utilisé. La raison principale, historique, repose sur le développement d'une identité remarquable (a-b)² = a² + b² - 2ab qui permet de simplifier les calculs de la variance :

$$\sigma_X^2 = \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i)^2\right) - \overline{X}^2 \approx \frac{1}{24}\left(67^2 + 50^2 + \cdots + 59^2\right) - 64,46^2 \approx 70,75$$

A RETENIR :

- La moyenne est un paramètre de centrage. Dans le cas discret : $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$
- La variance est un paramètre de dispersion autour de $\overline{X}$. Dans le cas discret :
  $$V(X) = \sigma_X^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{X})^2 = \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i)^2\right) - \overline{X}^2$$
- L'écart-type est un paramètre de dispersion autour de $\overline{X}$: $\sigma_X = \sqrt{V(X)}$

Application : - La moyenne est un paramètre de centrage. Dans l'entreprise, il faut plusieurs moyennes pour exploiter l'information.

- comparaison de situations, de performance : dynamisme
- évolution d'un ensemble de valeurs : étude de la tendance.

- La variance ou l'écart-type sont des paramètres de dispersion. Dans l'entreprise, il faut plusieurs variances ou écarts-types pour exploiter l'information.

- homogénéité - hétérogénéité d'un ensemble de valeurs

- prise en compte du risque après l'étude de la tendance.

Exercice V1 :

On dispose du tableau ci-contre relatif aux poids en gramme de 1000 pièces usinées.

Poids en grammes	Nombre de pièces
de 126 à < 130	12
de 130 à < 132	88
de 132 à < 134	156
de 134 à < 138	584
de 138 à < 146	140
de 146 à < 150	20

Etablir le tableau statistique. Représenter l'histogramme.

Voir « CORRIGE-V1 »

Exercice V2 :

On considère le cours de bourse d'un titre T. On note ses variations quotidiennes sur trois périodes de 10 jours ouvrables.

On obtient les résultats suivants :

Variations quotidiennes	**jour 1**	**jour 2**	**jour 3**	**jour 4**	**jour 5**	**jour 6**	**jour 7**	**jour 8**	**jour 9**	**jour 10**	**moyennes**	**médianes**
Période 1	2,7	1,2	-3,1	-0,2	-0,9	1,7	-2,3	-0,8	3,4	-0,6	0,11	-0,4
Période 2	4,9	7,1	11,3	-17,5	-2,6	-4,6	-5,1	0,8	15,7	-11,8	-0,18	-0,9
Période 3	2,7	1,2	**11,3**	-0,2	-0,9	1,7	-2,3	-0,8	3,4	-0,6	1,55	0,5

Vérifiez les calculs des moyennes et médianes ; interprétez les résultats.

Voir « CORRIGE-V2 »

Exercice V3 :

On considère la variable Y décrivant la taille d'une population Ω de taille n=24. Les observations sont données dans le tableau ci-contre :

167	173	182	183	167	158	171	170	169	161	181	186
174	180	162	164	174	160	189	168	193	185	177	166

1- Calculer la moyenne et la médiane

2- Calculer la variance, en déduire l'écart-type.

On regroupe les données en des classes, les extrémités étant : 150, 160, 170, 180, 190, 200.

3- Etablir le tableau statistique et représenter l'histogramme.

Voir « CORRIGE-V3 »

Exercice V4 :

On considère les trois cours de bourse ci-dessous journaliers :

X_1	100,77	100,63	99,74	100,52	99,06	100,45	100,61	99,83	98,81	99,44	99,56	100,08	99,52	101,55	98,66	99,23
X_2	195,93	199,81	198,8	198,78	203,21	200,2	200,4	199,76	203,94	197,89	199,65	200,75	202,95	199,4	199,18	199,17
X_3	299,09	300,88	301,42	302,35	297,84	296,79	300,21	303,02	300,75	299,1	304,38	304,97	298,89	303,23	298,16	300,46

1- Calculer les rendements journaliers (taux d'accroissement).
2- Calculer le risque de chaque titre de bourse (variance des rendements).
3- En déduire un classement des titres en fonction du risque en bourse.

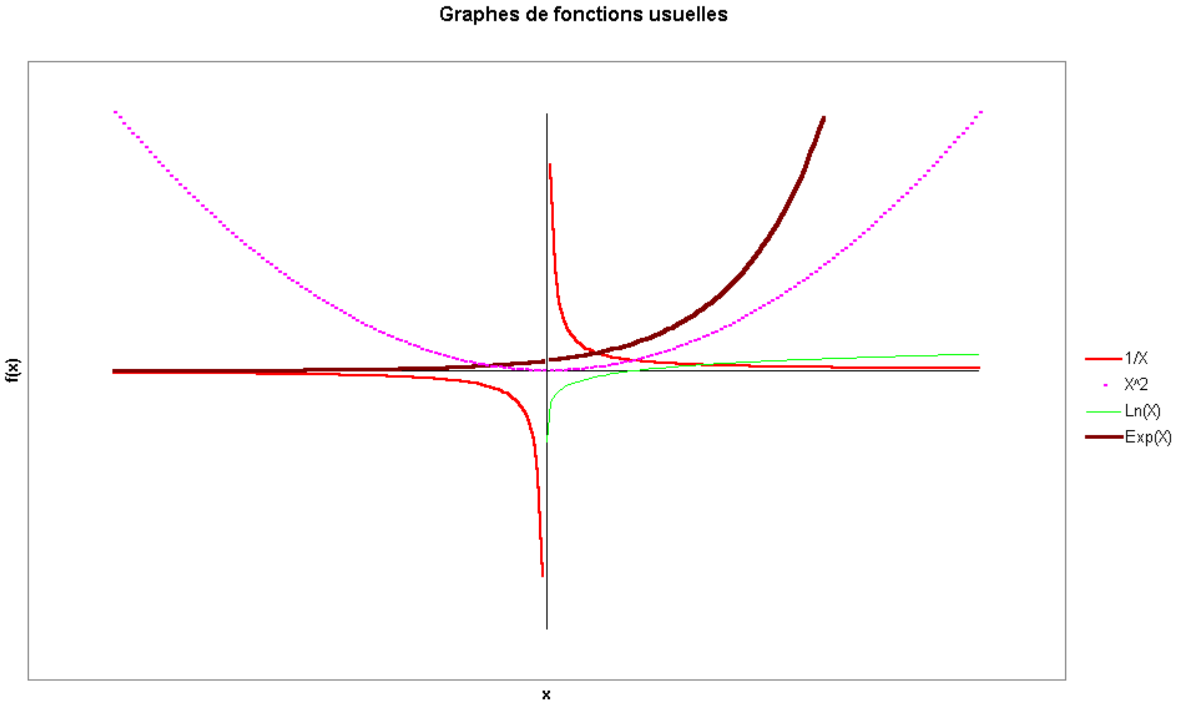
Voir « CORRIGE-V4 »

MAÎTRISE DES BASES DE MATHÉMATIQUES

SÉANCE N° 12

- W - FONCTIONS USUELLES

Activité W1 : Noms des fonctions.
Les courbes ci-dessous représentent des graphes de fonctions usuelles. Quels sont leurs noms ?

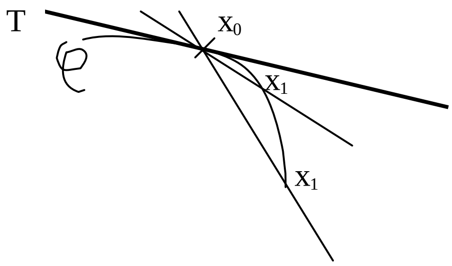


Corrigé de l'activité :
- Le graphe de la fonction : $x \mapsto \frac{1}{x}$ définie pour $x \neq 0$ s'appelle une hyperbole.
- Le graphe de la fonction : $x \mapsto x^2$ définie pour tout x réel s'appelle une parabole.
- Le graphe de la fonction : $x \mapsto \mathrm{Ln}(x)$ définie pour $x > 0$ s'appelle une courbe logarithmique.
- Le graphe de la fonction : $x \mapsto \mathrm{Exp}(x)$ définie pour tout x réel s'appelle une courbe exponentielle.

Exercice W1 : Applications des fonctions usuelles.
1- Quel type de trajectoire décrit le lancé d'une boule de pétanque ?
2- Quel type de trajectoire décrit une boule de billard ?
3- Quel type de trajectoire décrit le siège d'une balançoire ?
4- Quel type de courbe représentait la tendance boursière des start-up « euphoriques » de l'année 1998 ?
5- Quel type de courbe représentait la tendance du CAC 40 pour l'année 1998 ?
6- Quel type de courbe représentait la tendance du CAC 40 pendant 2001 et 2002 ?
7- On étudie l'aspect commercial d'un modèle de véhicule automobile connu jusqu'au jour où on ne le produit plus, par exemple la Peugeot 205. Quel type de courbe ajuste approximativement l'évolution du nombre de ses ventes cumulées ?

Voir « CORRIGE-W1 »

A RETENIR : ***DÉRIVÉE***



La **tangente** en x_0 est la droite T obtenue en faisant glisser le point x_1 de la corde $[x_0 ; x_1]$ le long de la courbe $\mathcal{C}$ jusqu'en x_0.
Si $\mathcal{C}$ est le graphe d'une fonction f alors la dérivée en x_0 est la pente de la tangente en x_0, ou le coefficient directeur de la tangente en x_0.
L'équation de la tangente est :

$$T : y = f(x_0) + f'(x_0)\times(x - x_0)$$

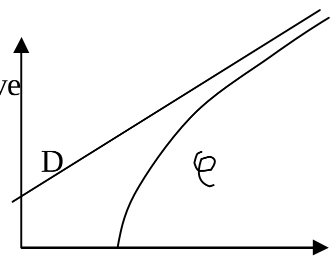
Formules sur les dérivées

f(x)	f'(x)
a	0
a x + b	a
a x² + b x + c	2 a x + b
1 / x	- 1 / x²
x^n	$n x^{n-1}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
ln(x)	1 / x
e^x	e^x

Fonction	*Fonction dérivée*
u + v	u' + v'
u.v	u' v + u v'
λ u	λ u'
1 / u	- u' / u²
$\frac{u}{v}$	$\frac{u'v - uv'}{v^2}$
u^n	$n u^{n-1} u'$

A RETENIR : ***ASYMPTOTE***

Lorsque la distance entre une courbe $\mathcal{C}$ représentative d'une fonction f et une droite D tend à s'annuler, alors la droite D est appelée asymptote à $\mathcal{C}$



<u>Exercice W2</u> : Minimisation du coût moyen.

Avant de développer la production d'une lessive, une entreprise cherche à déterminer la quantité optimale à produire, par jour, pour minimiser le coût moyen de production.

Ses installations permettent de considérer seulement les coûts variables (salaire, énergie, matière première,…) de production ; le coût total C de production en fonction de la quantité q produite est donné par : $C(q) = \frac{1}{3}q^3 - 3q^2 + 15q$, où q est exprimé en tonnes et C(q) en milliers d'euros.

1- Le coût marginal de production, noté Cm, est l'accroissement du coût total pour une unité supplémentaire de production : Cm(a) = C(a+1) – C(a), avec a exprimé en tonnes.
   a- En économie, on donne une approximation du coût marginal par la dérivée C'du coût total : Cm(q) = C'(q). Justifiez cette approximation.
   b- Soit g la fonction définie sur [0 ; 8] par : $g(x) = x^2 - 6x + 15$.
   Calculez g'(x), étudiez le signe de g'(x) et déduisez-en les variations de g. Dressez le tableau de variations de g.
   c- Vérifiez que g(q) = Cm(q). Construisez la courbe (Γ_1) représentative de la fonction Cm dans un repère orthogonal.
2- Le coût moyen de production, noté CM, est égal au coût total divisé par la quantité produite.
   a- Vérifiez que : $CM(q) = \frac{1}{3}q^2 - 3q + 15$
   b- Montrez que : $CM(q) = \frac{1}{3}(q - 4{,}5)^2 + \frac{33}{4}$
   Déduisez-en la quantité q_0 à produire pour que le coût moyen soit minimal.
   c- Construisez la courbe (Γ_2) représentative de la fonction CM.
   d- Vérifiez graphiquement que les courbes (Γ_1) et (Γ_2) se coupent lorsque le coût moyen est minimum.
3- Soit h la fonction définie sur [0 ; 8] par : $h(q) = \frac{C(q)}{q}$.
   a- Calculez la dérivée h' de h en utilisant la formule de dérivée d'un quotient.
   b- En remplaçant C'(q) par Cm(q), montrez que h'(q) s'annule lorsque le coût moyen est égal au coût marginal.
4- Quelle est la quantité optimale à produire, par jour, pour minimiser le coût moyen de production ? Quel est alors le coût total de production ?

<u>Voir « CORRIGE-W2 »</u>

<u>Exercice W3</u> : Bénéfice d'une entreprise.

Soit $C(x) = x^3 - 30x^2 + 300x$ le coût de fabrication de x objets en euros.

Chaque objet est vendu 84 €.

1- Déterminez les coûts fixes, variables, marginal et moyen ?
2- Etudiez les variations de C et tracez sa représentation graphique sur [0 ; 20]
3- Exprimez les recettes R(x) et le bénéfice B(x).
4- Représentez R(x) sur le schéma précédent.
5- Déterminez graphiquement l'intervalle de production qui assure un bénéfice à l'entreprise.
6- Retrouvez ce résultat par les calculs.

<u>Voir « CORRIGE-W3 »</u>

MAÎTRISE DES BASES DE MATHÉMATIQUES

SÉANCE N° 13

PROBLÈMES D'OPTIMISATION

- X - LA FONCTION LOGARITHME

A RETENIR

- La fonction logarithme népérien **ln** est définie pour $x > 0$ et on a : $\ln'(x) = \dfrac{1}{x}$
- $\ln(a.b) = \ln(a) + \ln(b)$ pour $a, b > 0$; $\ln(1) = 0$; $\ln(e) = 1$ avec $e \approx 2{,}718282$
- $\ln\left(\dfrac{1}{a}\right) = -\ln(a)$; $\ln\left(\dfrac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$; $\ln\left(a^n\right) = n \times \ln(a)$; $\ln\left(\sqrt{a}\right) = \dfrac{1}{2} \times \ln(a)$
- La fonction ln est strictement croissante sur $]0 ; +\infty[$
- $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \ln(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = 0$; $(\ln(u))' = \dfrac{u'}{u}$

Exercice X1 : Calcul du coût moyen minimal.
Une entreprise fabrique une quantité x d'un produit, exprimée en milliers de tonnes, dont le coût total, exprimé en milliers d'euros est défini sur [0 ; 10] par $C(x) = \dfrac{x^2}{2} + 4\ln(x+1)$

1- Etudier les variations de la fonction f définie sur [0 ; 10] par : $f(x) = x^2 - 8\ln(x+1) + \dfrac{8x}{x+1}$
2- En déduire que f s'annule pour une valeur α unique sur]0 ; 10] (en utilisant la propriété de continuité pour les fonctions croissantes).
3- Déterminer une valeur approchée de α à 10^{-3} près par défaut (avec votre calculatrice).
4- En déduire le signe de f sur [0 ; 10].
5- Etudier les variations du coût moyen CM sur]0 ; 10].

6- Pour quelle production (à 1 tonne près) l'entreprise a-t-elle un coût moyen minimal et quel est ce coût (à 1 € près) ?
7- Quelle est, pour cette production, la valeur correspondante du coût marginal Cm ?

Voir « CORRIGE-X1 »

- Y - Programmation linéaire

Exercice Y1 : Calcul du bénéfice maximum.
Une entreprise fabrique des poupées P et des poupées P'. Elle utilise trois machines M_1, M_2, M_3.
Pour fabriquer une poupée P, il faut utiliser M_1 pendant 1 h, M_2 pendant 2 h et M_3 pendant 1 h.
Pour fabriquer une poupée P', il faut utiliser M_1 pendant 1 h, M_2 pendant 1 h et M_3 pendant 3 h.
Les seules contraintes sont que, pendant un mois, M_1, M_2 et M_3 ne sont respectivement disponibles que 60h, 90h et 150h.

1- Soit x (x entier positif) le nombre de poupées P fabriquées en un mois et y (y entier positif) le nombre de poupées P' fabriquées en un mois.
   a- Ecrire les inéquations présentant les contraintes, vérifiées par x et y.
   b- Montrer que l'ensemble F des couples (x, y) d'entiers positifs vérifiant les contraintes est inclus dans l'ensemble E des couples (x, y) de réels vérifiant le système suivant :

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x + y \leq 60 \\ 2x + y \leq 90 \\ x + 3y \leq 150 \end{cases}$$

   c- Représenter graphiquement E.

2- a- Si une poupée P donne un bénéfice de 10 € et une poupée P' donne un bénéfice de 20 €, calculer le bénéfice réalisé b lorsqu'on fabrique et on vend x poupées P et y poupées P' en un mois.
   b- Soit Δ la droite d'équation : $y = -\frac{1}{2}x + \frac{b}{20}$. Quand b varie, que peut-on dire de la droite Δ ?
   c- Trouver la droite Δ correspondant à un bénéfice maximum et calculer ce bénéfice maximum.

3- Calculer x et y correspondant à un bénéfice maximum et calculer ce bénéfice maximum dans chacun des cas suivants :
   a- une poupée P donne un bénéfice de 15 € et une poupée P' donne un bénéfice de 10 €.
   b- une poupée P et une poupée P' donnent, chacune, un bénéfice de 15 €.

Voir « CORRIGE-Y1 »

- Z - Modèle de Wilson

<u>Activité Z1</u> : Evolution du stock à partir du point de commande.
La société LEBOUVIER présente les caractéristiques suivantes :
Au niveau de l'approvisionnement :

- elle consomme 100 kg de matières premières par jour
- elle travaille 7 jours sur 7
- le délai de livraison respecté par son fournisseur est de 5 jours ouvrés ; il n'y a pas de livraison les samedi et dimanche
- pour faire face aux aléas, elle possède l'équivalent de deux jours de consommation au moment où elle est réapprovisionnée
- la capacité de stockage de l'entreprise est de 4 500 kg

Au niveau des coûts de stockage :

- 100 kg de matières premières coûtent environ 140 €
- la consommation annuelle de matières premières est de 250 000 €
- le coût de passation d'une commande est de 15 €
- le coût de possession du stock est de 25% (en valeur) du stock moyen
- les produits n'ayant pas changé depuis plusieurs années, le coût de lancement de commande est négligé.

1- Quel est l'intervalle I_{stock} où se situerait le niveau satisfaisant des stocks ?
2- Calculer le nombre de commandes à passer dans l'année pour minimiser les coûts d'approvisionnement.
3- En déduire un niveau optimum des stocks dans l'intervalle I_{stock}.

Corrigé de l'activité :

1- Le niveau satisfaisant de stockage est compris entre 900 kg et 4 500 kg. En effet, on distingue :

- le stock délai est de : 100 kg/jour × 7 jours = 700 kg
- le stock tampon pour faire face aux aléas est de : 100 kg/jour × 2 jours = 200 kg
- les stock de sécurité est donc de : 700 + 200 = 900 kg.

2- Nous allons faire quelques hypothèses qui nous permettront d'appliquer la méthode de Wilson (1915).

- *<u>hypothèse 1</u>* : coût de passation de commande : $y_1 = b \times x$
  où b = coût de passation d'une commande
  et x = nombre de commandes dans l'année
- *<u>hypothèse 2</u>* : coût de possession du stock : $\boxed{y_2 = SM \times t\%}$
  où SM = montant du stock moyen
  et t% = coût moyen de stockage en % (coût pour 100 € en stock)
- *<u>hypothèse 3</u>* : le coût de lancement de commande est négligeable
- *<u>hypothèse 4</u>* : la consommation annuelle des matières premières et produits est notée C, elle correspond à l'ensemble des stocks épuisés dans l'année. Si SMn est le montant du stock mi**n**imum et si SMx est le montant du stock ma**x**imal, alors pour chaque commande, le montant de stock : SMx - SMn est épuisé et on a :

$$\boxed{C = (SMx-SMn) \times x}$$

- *conséquence 1* : On a ainsi : $\boxed{SM = \frac{SMx + SMn}{2} = \frac{C}{2x} + SMn}$
- *conséquence 2* : le coût d'approvisionnement est : $\boxed{Y = y_1 + y_2}$ où

$$y_1 = b \times x \quad ; \quad y_2 = \frac{C}{2x} t\% + SMn \times t\% \qquad \text{ainsi,} \qquad \boxed{Y = b \times x + \frac{C}{2x} t\% + SMn \times t\%}$$

- *Conclusion* : on cherche à déterminer $\boxed{x = \arg \min_x Y}$

On a : $Y' = b - \frac{C}{2x^2} t\%$ et on résout $Y' = 0$

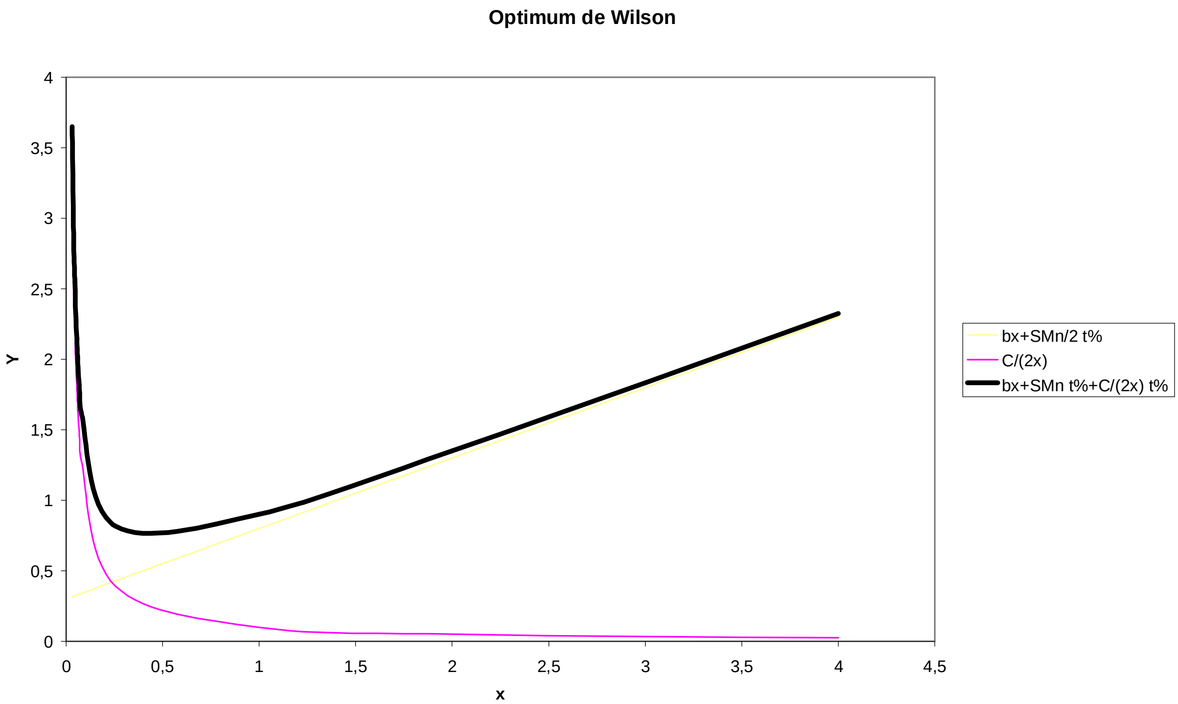
(voir le graphique ci-dessous) on obtient : $\boxed{x = \sqrt{\frac{C \times t\%}{2 \times b}}}$

An : $\boxed{x = \sqrt{\frac{250000 \times 0{,}25}{2 \times 15}} \approx \sqrt{2083{,}33} \approx 45{,}64}$

Par conséquent, il faut pour consommer les stocks de l'année, et pour maximiser le profit, passer **46** commandes dans l'année (valeur optimale).

3- En théorie il faut 45,64 commandes dans l'année et une commande correspond à : $\frac{250000}{45{,}64} \approx 5477{,}65$ € de stock tous les $\frac{360}{45{,}64} \approx 8$ jours. On sait que 100 kg de matières premières coûtent environ 140 €.

Donc, une commande correspond à : $\frac{5477{,}65}{140} \times 100 \text{ kg} \approx 3912{,}61 \text{ kg}$. La valeur est bien dans l'intervalle I_{stock} = [900 kg ; 4500 kg].



MAÎTRISE DES BASES DE MATHÉMATIQUES

SÉANCE N° 14

RÉVISION ET PRÉPARATION AU CONTRÔLE FINAL

Exercice 1 : *Règle de trois.*

Un automobiliste effectue un trajet comportant 95 km sur autoroute, suivis de 38 km sur route départementale. Il roule à 125 km/h de moyenne sur autoroute.

1- Pour le trajet aller, il met 1 h 16 mn. A quelle vitesse moyenne roule-t-il sur route départementale ?
2- On admet que la consommation du véhicule est proportionnelle à la vitesse. Le véhicule consomme 9,6 litres à 100 km/h pour 100 km parcourus.
   Quelle est en litres la consommation du véhicule pour la totalité du trajet aller ? (3 chiffres après la virgule).
3- Au retour il reste dans le réservoir 13,1 litres d'essence. L'automobiliste prend le même chemin mais décide de réduire sa vitesse sur autoroute afin de ne pas reprendre d'essence.
   Quelle est alors, la vitesse moyenne maximale qu'il pourrait s'autoriser sur autoroute ? (arrondir au km/h inférieur.)

Voir « CORRIGE-1 »

Exercice 2 : *Intervalles.*

Un circuit de randonnée a une longueur totale de 15 km. Des balises bleues et rouges sont disposées alternativement tous les 700 et 1 600 mètres de la balise précédente.

La première balise, rouge, se trouve à 700 m du départ.

1- Combien y a-t-il de balises au total ?

Le tracé de la randonnée a, en fait, la forme d'un carré dont les sommets sont appelés A, B, C et D dans le sens du parcours ; A étant le départ.

2- Y a-t-il une balise en C ? Si oui, quel est son numéro ? Si non, quelles sont les deux balises les plus proches de C et quels sont leurs numéros ?
3- Combien y a-t-il de balises disposées sur le côté CD ?

Sur les 3 premiers kilomètres un marcheur fait 52 doubles pas (1 double pas = 2 pas) pour 100 m. Puis fatigué, il augmente, tous les kilomètres, sa cadence de 1 double pas pour 100 m.
4- Combien de doubles pas aura-t-il fait en passant la 11ème balise ?

Voir « CORRIGE-2 »

Exercice 3 : *Pourcentage.*
Une entreprise dans le secteur agricole emploie 420 salariés dont 112 femmes.
1- Quel est le pourcentage d'hommes dans l'entreprise (2 chiffres après la virgule) ?

75% des femmes et 25% des hommes sont célibataires.
2- Combien de salariés sont-ils célibataires ?

Parmi les salariés masculins, 26% sont européens.
3- Combien de salariés masculins ne sont-ils pas européens ?

Il y a 56,25% de salariés qui ont une qualification parmi les hommes européens et 27,5% de salariés qualifiés parmi les hommes non européens.
4- Combien y a-t-il de salariés masculins qualifiés ?
5- Sachant qu'il y a en tout 155 salariés qualifiés, quel est le pourcentage de salariés qualifiés parmi les femmes?
6- Si 73,1 % des salariés ne sont pas européens, combien de salariés féminins sont-ils européens ?

(*on arrondira les nombres de salariés aux nombres entiers les plus proches*).

Voir « CORRIGE-3 »

Exercice 4 : *Mouvement uniforme.*
Deux trains doivent faire un trajet de 420 km. L'un est omnibus et fait 75 km à l'heure ; l'autre est express et fait 100 km à l'heure.
Le premier part à 8 h 05 mn. A quelle heure l'autre devra-t-il partir pour arriver à destination 26 mn plus tard que le premier ?

Voir « CORRIGE-4 »

Exercice 5 : *Intérêts.*
Une voiture qui coûtait 10 000 **€** a augmenté le 1er janvier de 2,5%.
1- Calculez le nouveau prix de la voiture.
2- On verse à la commande 30% de la somme et le reste est emprunté sur 2 ans avec un taux d'intérêt simple de 9%.
   a- Combien versera-t-on en plus du prix de la voiture ?
   b- Quel sera le montant de chaque versement mensuel ?

Voir « CORRIGE-5 »

<u>Exercice 6</u> : *Intérêts composés.*

Une somme de 1 200 € peut-être placée pendant 2 ans à 8% en intérêts composés ou pendant le même temps à 10% en intérêts simples.
Quel est le placement le plus intéressant ?

<u>Voir « CORRIGE-6 »</u>

<u>Exercice 7</u> : *Indices et statistiques.*

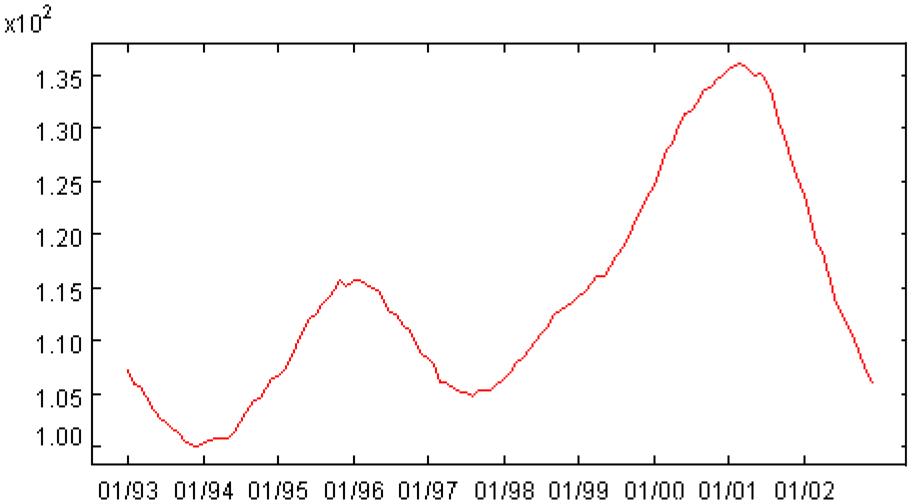
Indice Publicitas sur l'évolution des dépenses publicitaires dans la presse quotidienne
Base 100 en décembre 93.

Mois	1995	1996	1997	1998	1999	2000	2001	2002
Janvier	106,7	115,6	108,3	106,4	114,2	124,5	135,6	123,7
Février	107,2	115,6	107,8	107	114,5	126,2	136	121,4
Mars	108,4	115,4	106,1	108	115,4	127,9	136,1	119,1
Avril	109,4	114,9	106	108,4	116	128,5	135,8	118,3
Mai	111,1	114,8	105,5	109,1	116	130,3	135	116,2
Juin	112	113,7	105,1	109,8	117	131,3	135,1	114
Juillet	112,5	112,7	105,1	110,5	117,9	131,6	134,4	112,7
Août	113,4	112,4	104,8	111,2	118,8	132,4	133	111,6
Septembre	114	111,3	105,2	112,4	119,6	133,7	130,7	110,1
Octobre	114,8	110,9	105,3	112,8	121,2	133,8	129,1	108,5
Novembre	115,6	109,7	105,3	113,2	122,1	134,6	127,2	106,9
Décembre	115,2	108,7	105,9	113,6	123,5	134,9	125,5	
Σ	1340,3	1355,7	1270,4	1322,4	1416,2	1569,7	1593,5	

1- Calculez les moyennes des indices de 1995 à 2001.

2- On souhaite proposer une prévision de l'indice pour décembre 2002.
Pour cela, on analyse les explications de spécialistes de Publicitas :

« Avec un nombre d'éditions identique à celui de l'année précédente, l'indice Publicitas recule de 1,6 points, passant de 108,5 à 106,9 points.
Si les annonces d'offres d'emploi restent l'une des principales causes de diminution de l'indice, la baisse des volumes de la catégorie d'annonces "commercial" contribue ce mois-ci tout aussi clairement à sa dégradation, ceci en raison du ralentissement de l'activité de certains clients nationaux. La catégorie "occasionnel" se voit quant à elle dynamisée par les annonces politiques générées par les votations de la mi-novembre, tandis que les annonces immobilières restent pénalisées par le manque d'appartements à disposition sur le marché. »



Pour le mois de décembre, l'éventualité d'une guerre de plus en plus probable devrait maintenir une tendance à la baisse, avec une position de repli de plusieurs clients nationaux;

a- calculez les taux d'accroissement des indices entre les mois sept. – oct. et oct. – nov.

b- En déduire une valeur prévisionnelle du taux d'accroissement novembre – décembre, et une prévision pour l'indice du mois de décembre.

3- En tenant compte de la prévision, calculez l'indice moyen annuel de 2002.

4- Calculez les indices des moyennes annuelles de 2001 et 2002 en choisissant la base 100 en 2000.

5- Représentez la courbe des indices des moyennes annuelles de 1995 à 2002.
Proposez des scénarios prévisionnels possibles pour 2003.

<u>Voir « CORRIGE-7 »</u>

Contrôle Final
Avec calculatrice
Sans document
2h00

FACULTÉ LÉONARD DE VINCI
FILIÈRE COMMERCE ET GESTION
S02

Technique Quantitative 1
Prof. R.F. Peltier

Exercice 1 : (3 points) TOSHIBA désire construire un nouveau bâtiment afin d'y entreposer de nouveaux ordinateurs. Cet immeuble aura 3 étages plus le rez-de-chausée identiques. Un escalier de 3 marches de 20 cm de hauteur chacune, pour accéder à l'immeuble.
La façade mesure 12,80 m de haut ; chaque étage est séparé par une couche en béton de 30cm d'épaisseur et la plate forme du toit est épaisse de 50 cm.
Mesurez la hauteur des pièces de chaque étage.

Exercice 2 : (3 points) Une ferme vend sa production d'œufs de la façon suivante : Lustucru prend 24% de la production totale, Panzani achète l'équivalent des 2/3 de la quantité de Lustucru, Barilla et Anesi se partagent le reste ; Barilla prenant 3 fois plus d'œufs qu'Anesi.
La production totale est de 7 425 œufs.
Quelle est la part de chaque usine ?
Sachant qu'en moyenne 2,5% des œufs sont fêlés et que Panzani en utilise 5 par kg de pâtes, quelle sera la production réalisée avec les œufs achetés dans cette ferme ?

Exercice 3 : (4 points) Un grand prix de 12 km comporte 6 virages équipés de glissières de sécurité : 2 glissières de 200 m et 4 de 75 m.

1- Sachant qu'une glissière dispose de un poteau tous les 5 m et un poteau à chaque extrémité, combien y a-t-il de poteaux au total ?
2- Sur la grille de départ, les voitures sont disposées comme suit :
   - deux colonnes (A et B) de 10 voitures ;
   - dans chaque colonne les voitures sont distantes de 12,50 m ;
   - la 1ère voiture de « A » est sur la ligne de départ, la 1ère voiture de « B » est à 8,50 m de la ligne de départ.

   Sachant qu'une voiture mesure 4,5 m de long, à quelle distance de la ligne de départ se trouve la dernière voiture dans chaque colonne ?
3- Dans « A », la distance séparant l'avant de la 1ère voiture et l'arrière de la voiture X est de 72,50 m. Combien y a-t-il de voitures entre elles dans « A » ?

Exercice 4 : (5 points) M. Durand reçoit en héritage une somme d'argent. Il place 1/4 de cette somme à 5% pendant un an, et il en consacre 2/5 en achat d'actions.

1- Sachant que la différence entre les deux sommes placées est de 2 220 €, calculer la somme dont M. Durand a hérité.
2- Calculer l'intérêt annuel rapporté par l'argent placé à 5%
3- En un an, les deux sommes placées ont rapporté en tout 570 €. Quel est le taux de rendement du placement en actions ?
4- Le dividende par action a été de 5 € et M. Durand avait reçu 3 actions gratuites au moment de l'achat. Quel était alors le cours de l'action ?

Exercice 5 : (5 points)

Le tableau ci-dessous décrit le suivi des stocks des matières premières A, B et C sur le quatrième trimestre de l'année 2000, de la société Bouvier.

Entreprise Bouvier	Coût unitaire de stockage le 30 septembre 2000	Quantité le 30 septembre (kg)	Coût unitaire de stockage le 31 décembre 2000	Quantité le 31 décembre (kg)
Matières A	1,4 €	3 500	1,5 €	3 900
Matières B	1 €	4 500	1,02 €	4 300
Matières C	2,1 €	900	2,58 €	980

1- Calculer l'indice de Laspeyres des prix pour l'entreprise Bouvier utilisant des 3 types de matières dans le 4ème trimestre 2000.
2- Quel est le taux d'accroissement du coût de stockage des matières A, en pourcentage ?
3- Calculer l'indice de coût de stockage des matières B, en prenant pour base 100 ?
4- Calculer la variation des coûts pour les matières C, sur le 4ème trimestre 2000.
5- Au 1er trimestre 2001, le coût de stockage unitaire a augmenté de 19% pour les matières C et les quantités stockées ont progressé de 5% pour chaque type de matière, par rapport au trimestre précédent.

Quel est le nouvel indice synthétique trimestriel ?
Calculer l'indice de Laspeyres semestriel.

Rappel : Formules de calcul de l'indice de Laspeyres des prix

Pour **k** produits, on note :

- p_0^i : le prix unitaire du produit i dans la situation initiale
- p_1^i : le prix unitaire du produit i dans la situation finale
- q_0^i : la quantité du produit i consommé dans la situation initiale
- q_1^i : la quantité du produit i consommé dans la situation finale.

$$L_{1/0}^P = \sum_{i=1}^{k} \alpha_0^i \, I_{1/0}^i \quad \text{avec} \quad \alpha_0^i = \frac{p_0^i q_0^i}{\sum_{j=1}^{k} p_0^j q_0^j} \quad \text{et} \quad I_{1/0}^i = 100 \times \frac{p_1^i}{p_0^i}$$

On peut encore écrire cette expression de la façon suivante : $$L_{1/0}^P = 100 \times \frac{\sum_{i=1}^{k} p_1^i q_0^i}{\sum_{j=1}^{k} p_0^j q_0^j}$$